



توانا بود هر که دانا بود  
وزارت آموزش و پرورش

# حساب استدلالی

برای سال ششم ریاضی

سازمان کتابهای درسی ایران

توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

# حساب استدلالی

برای سال ششم ریاضی

حق چاپ محفوظ

این کتاب که به وسیله آقایان : ابوالقاسم قربانی و  
حسن صفاری نگارش یافته، بر طبق ماده ۳ قانون کتابهای درسی  
و اسنادنامه سازمان کتابهای درسی ایران برای تدریس در  
دبیرستانها برگزیده شده است .

چاپ از : پیروز

## تذکر

در اسفندماه ۱۳۵۴ شمسی قانونی در مجلس شورای ملی و مجلس سناى ایران به تصویب رسید که بنا بر آن مبدأ تاریخ ایران، تاریخ شاهنشاهی قرارداد شده. تاریخ شاهنشاهی ایران از زمان تشکیل دولت هخامنشی به دست توانای کوروش کبیر محسوب می شود و از آن زمان تاکنون ۲۵۳۵ سال می گذرد. چون اصلاح سنوات تاریخی در کتابهای درسی در سال جاری به علت کمی وقت و چاپ شدن قسمتی از کتابها مقدور نگردید و این امر در سال تحصیلی آینده انجام خواهد گرفت. بنا بر این آموزگاران و دبیران محترم باید توجه داشته باشند که ضمن تدریس مطالب درسی هر کجا به سنوات تاریخی شمسی و میلادی بر می خورند برابری آن را با سال شاهنشاهی تذکر دهند و دانش آموزان را وادارند تا در کتابهای خود سنوات مزبور را اصلاح نمایند. برای مزید اطلاع یادآور می شود که تبدیل سالهای شمسی و میلادی به تاریخ شاهنشاهی بسیار آسان و به طریق زیر انجام می شود:

۱- با افزودن ۱۱۸۵ سال به تاریخ شمسی تاریخ شاهنشاهی به دست می آید مثلاً تاجگذاری رضا شاه کبیر سرسلسله خاندان پهلوی که در سال ۱۳۰۵ شمسی انجام گرفته برابر سال ۲۴۸۵ شاهنشاهی و شروع سلطنت شاهنشاه آریامهر که در سال ۱۳۲۰ شمسی بوده برابر با سال ۲۵۰۰ شاهنشاهی می شود و به همین علت هم جشن بزرگداشت پنجاه سال شاهنشاهی خاندان پهلوی باشکوه هر چه تمامتر در روز امسال در آرامگاه رضاشاه کبیر انجام یافت.

۲- برای تبدیل سال میلادی به سال شاهنشاهی کافی است که ۵۵۹ سال به تاریخهای میلادی اضافه شود چنان که اگر ۵۵۹ به سال ۱۹۷۶ میلادی اضافه شود سال ۲۵۳۵ شاهنشاهی یعنی سال جاری به دست می آید.

۳- در مورد سالهای قبل از میلاد اگر عدد کوچکتر از ۵۵۹ باشد آن را از ۵۵۹ کسر می کنیم سال شاهنشاهی به دست می آید و اگر بزرگتر از ۵۵۹ باشد ۵۵۹ را از آن کسر می کنیم سال پیش از شاهنشاهی به دست می آید. مثلاً واقعه ای که در ۲۰۰ سال قبل از میلاد اتفاق افتاده برابر با سال ۳۵۹ شاهنشاهی و رویدادی که در ۱۴۵۰ پیش از میلاد رخ داده برابر با ۸۹۱ پیش از شاهنشاهی ایران است.

## فهرست مندرجات

| صفحه | عنوان                                           |
|------|-------------------------------------------------|
| ۱    | فصل اول - شمار دهمی (اعشاری)                    |
| ۱۰   | فصل دوم - چهار عمل اصلی                         |
| ۱۰   | ۱- جمع                                          |
| ۱۴   | ۲- تفریق                                        |
| ۲۱   | ۳- تساوی و نامساوی                              |
| ۲۳   | ۴- ضرب                                          |
| ۳۱   | ۵- قوای اعداد                                   |
| ۳۳   | ۶- عمل ضرب                                      |
| ۳۹   | ۷- تقسیم                                        |
| ۴۲   | ۸- خواص تقسیم                                   |
| ۴۷   | ۹- تقسیم يك عدد بر حاصل ضرب چند عدد             |
| ۴۹   | ۱۰- تقسیمات متوالی                              |
| ۵۰   | ۱۱- عمل تقسیم                                   |
| ۶۰   | فصل سوم - دستگاههای شمار                        |
| ۶۵   | فصل چهارم - قابلیت تقسیم                        |
|      | ۱- باقیمانده تقسیم مجموع یا حاصل ضرب چند        |
| ۶۵   | عدد بر يك عدد                                   |
| ۶۷   | ۲- قابلیت تقسیم                                 |
|      | فصل پنجم - بزرگترین مقسوم علیه مشترك و كوچكترین |
| ۸۲   | مضرب مشترك                                      |
| ۸۲   | ۱- بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو یا چند عدد      |
| ۸۹   | ۲- كوچكترین مضرب مشترك دو یا چند عدد            |
| ۹۷   | فصل ششم - اعداد اول                             |
| ۱۱۵  | فصل هفتم - كسرها                                |

## فصل اول

## شمار دهمی (اعشاری)

در حساب مقدماتی ، از خواص اعداد و اعمالی که در باره آنها می توان انجام داد و بکاربردن این اعمال در حل مسائل گفتگو می شود . در حساب استدلالی این خواص را بوجهی منطقی ثابت می کنند و دلیل هر يك از محاسبات عملی را شرح می دهند .

۱ - اعداد صحیح\* - مفهوم عدد صحیح با در نظر گرفتن دسته ای از اشیا حاصل می شود . فرض می کنیم که يك کیسه خالی و يك سبد سیب داشته باشیم . چون يك سیب از سبد برداریم و در کیسه بیندازیم ، کیسه دارای يك سیب می شود . اگر مجدداً يك سیب از سبد برداشته در کیسه بیندازیم ، کیسه دارای يك و يك سیب می شود . به جای آنکه بگوییم يك و يك می گوئیم دو . باز يك سیب از سبد برداشته در کیسه می اندازیم . اکنون کیسه دارای يك و يك و يك سیب است ، و نیز می توان گفت کیسه دارای دو و يك سیب است . به جای آنکه بگوییم دو و يك می گوئیم سه .

\* یکی چیست؟ آن است که یگانگی بر او افتد و بدو نام زده شود . عدد چیست ؟ جمله ای است از یکها گردآمده . ( از کتاب التفهیم تألیف استاد ابوریحان بیرونی در سال ۴۲۵ هجری قمری ) .

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| ۱- تعریف کسر و خواص آن        | ۱۱۵ |
| ۲- ساده کردن کسرها            | ۱۲۲ |
| ۳- تحویل چند کسر به يك مخرج   | ۱۲۵ |
| ۴- اعمال راجع به کسر          | ۱۲۹ |
| ۵- کسر اعشاری ، اعداد اعشاری  | ۱۳۹ |
| ۶- مقدار تقریبی يك کسر        | ۱۴۳ |
| ۷- اعداد اعشاری متناوب        | ۱۴۷ |
| فصل هشتم - جذر                | ۱۵۸ |
| فصل نهم - نسبت و تناسب        | ۱۶۸ |
| ۱- نسبت دو عدد                | ۱۶۸ |
| ۲- تناسب                      | ۱۶۹ |
| ۳- تقسیم به نسبت              | ۱۷۱ |
| فصل دهم - خطاها               | ۱۷۳ |
| جدول اعداد اول کوچکتر از ۲۰۰۰ | ۱۸۲ |
| مسائل مختلف                   | ۱۸۳ |
| مسائل امتحانات نهایی          | ۱۸۹ |

## فصل اول

## شمار دهمی (اعشاری)

در حساب مقدماتی ، از خواص اعداد و اعمالی که در باره آنها می توان انجام داد و بکاربردن این اعمال در حل مسائل گفتگو می شود . در حساب استدلالی این خواص را بوجهی منطقی ثابت می کنند و دلیل هر يك از محاسبات عملی را شرح می دهند .

۱ - اعداد صحیح\* - مفهوم عدد صحیح با در نظر گرفتن دسته ای از اشیا حاصل می شود . فرض می کنیم که يك کیسه خالی و يك سبد سیب داشته باشیم . چون يك سیب از سبد برداریم و در کیسه بیندازیم ، کیسه دارای يك سیب می شود . اگر مجدداً يك سیب از سبد برداشته در کیسه بیندازیم ، کیسه دارای يك و يك سیب می شود . به جای آنکه بگوییم يك و يك می گوئیم دو . باز يك سیب از سبد برداشته در کیسه می اندازیم . اکنون کیسه دارای يك و يك و يك سیب است ، و نیز می توان گفت کیسه دارای دو و يك سیب است . به جای آنکه بگوییم دو و يك می گوئیم سه .

\* یکی چیست؟ آن است که یگانگی بر او افتد و بدو نام زده شود . عدد چیست ؟ جمله ای است از یکها گردآمده . ( از کتاب التفهیم تألیف استاد ابوریحان بیرونی در سال ۴۲۵ هجری قمری ) .

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| ۱- تعریف کسر و خواص آن        | ۱۱۵ |
| ۲- ساده کردن کسرها            | ۱۲۲ |
| ۳- تحویل چند کسر به يك مخرج   | ۱۲۵ |
| ۴- اعمال راجع به کسر          | ۱۲۹ |
| ۵- کسر اعشاری ، اعداد اعشاری  | ۱۳۹ |
| ۶- مقدار تقریبی يك کسر        | ۱۴۳ |
| ۷- اعداد اعشاری متناوب        | ۱۴۷ |
| فصل هشتم - جذر                | ۱۵۸ |
| فصل نهم - نسبت و تناسب        | ۱۶۸ |
| ۱- نسبت دو عدد                | ۱۶۸ |
| ۲- تناسب                      | ۱۶۹ |
| ۳- تقسیم به نسبت              | ۱۷۱ |
| فصل دهم - خطاها               | ۱۷۳ |
| جدول اعداد اول کوچکتر از ۲۰۰۰ | ۱۸۲ |
| مسائل مختلف                   | ۱۸۳ |
| مسائل امتحانات نهایی          | ۱۸۹ |

هر يك از كلمات **يك** و **دو** و **سه** عددی صحیح را معین می کند .  
عدد **يك** را به هر چیز اطلاق کنیم، برای ما تصویر یگانگی (وحدت)  
آن چیز حاصل می شود (يك كتاب، يك مرد). وقتی كه يك دسته از اشیا  
همنوع را در نظر می گیریم، هر کدام از آنها **واحد** آن مجموعه است  
(مثلا يك كتاب واحد جنس كتاب است).

اگر عدد سه را به يك دسته از اشیا اطلاق کنیم، فوراً برای ما  
تصور **يك و يك و يك** ایجاد می شود و ایجاد این تصور، مربوط به نوع آن  
دسته از اشیا نیست (سه مداد، سه اسب). به این دلیل می گوئیم سه، **عددی** است  
**مجرد**. یعنی صرف نظر از مجموعه اشیايی كه عدد سه را به آن اطلاق  
می كنیم، این عدد در ما يك تصور دقیق ایجاد می كند. عددی را كه با نام  
واحد همراه باشد (دو میز) **عدد مقید** می نامند. (بر حسب قرارداد عدم  
شیء را با عدد **صفر** می نمایانند).

**۲- سلسله طبیعی اعداد\*** - اگر در مثال فوق، عمل را ادامه داده  
سیبها را يك يك از سبد برداریم و در کیسه بریزیم، در هر بار کیسه  
شامل يك عده سیب است و به هر يك از آنها می توان يك عدد نسبت داد:  
سه و يك یا **چهار**، چهار و يك یا **پنج**، و غیره .  
يك - دو - سه - چهار - پنج - شش - هفت - هشت - نه - ده و غیره .

\* عددهای طبیعی کدامند؟ آنند كه ابتدا از یکی كند و زیادت يك يك  
همی كند چون ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، .... و نیز آن را عددهای متوالی خوانند  
آی يك پس از دیگر (از كتاب التفهیم).

هر عدد از این سلسله با افزودن يك واحد به عدد ماقبل خود تشکیل می شود  
و واضح است كه هر قدر بخواهیم، می توانیم اعداد این سلسله را زیاد كنیم.  
این سلسله را **سلسله طبیعی اعداد** (عددهای صحیح) می نامند . **سلسله**  
**طبیعی اعداد**، نامحدود (بی پایان) است .

**۳- شمار لفظی** - چون سلسله طبیعی اعداد نامحدود است،  
ممکن نیست كه برای هر يك از آنها جداگانه نامی اختیار كنیم؛ پس لازم  
می آید طریقه ای بدست آوریم كه به مدد آن، با عده کمی لغت، اعداد زیادی  
را چنان نامگذاری كنیم كه هر يك از لغاتی را كه بكار می بریم، تصور  
صحیحی از عدد منظور در ما ایجاد كند. مقصود از شمار **لفظی** همین است.  
چون نامگذاری اعداد منوط به قرارداد است، البته می توان قواعد  
مختلفی برای شمار در نظر گرفت . مجموعه هر يك از این قراردادها را  
**دستگاه شمار** می نامند .

**۴- شمار دهمی (اعشاری)** - دستگاه شماری كه اکنون  
ما بین تمام ملل مستعمل است، **دستگاه شمار دهمی** است و به این علت  
دهمهی نامیده شده كه عدد ده كه آن را **مبنای** این دستگاه می خوانند،  
در اینجا حائز اهمیت خاصی است\* (بعداً دستگاههای شمار دیگری را  
كه مبنای آنها اعداد غیر از ده است، خواهیم دید) .

\* چنین تصویری رود كه چون بشر در آغاز كار برای شمردن اعداد انگشتان  
دو دست خود را بكار می برده است (یعنی وقتی كه می خواسته است عده بسیاری از  
اشیا را بشمارد آنها را از يك تا ده می شمرده و باز از نو شروع می كرده است)، مبنای  
شمار معمولی عدد ده است .

۵ - قوانین شمار دهدهی - اعداد يك و دو سه و چهار و پنج و شش و هفت و هشت و نه را مرتبه اول یا مرتبه يكان (آحاد) می نامند. واحد مرتبه اول يك است .

عدد ده را واحد مرتبه دوم یا مرتبه دهگان (عشرات) قرار می دهند و از این لحاظ آن را يك دهه می نامند. پس، اعداد بعد از ده عبارتند از:

|             |             |             |               |
|-------------|-------------|-------------|---------------|
| ده يك دهه   | دو دهه      | سه دهه      | چهار دهه      |
| يك دهه و يك | دو دهه و يك | سه دهه و يك | چهار دهه و يك |
| يك دهه و دو | دو دهه و دو | سه دهه و دو | چهار دهه و دو |
| .....       | .....       | .....       | .....         |
| .....       | .....       | .....       | .....         |
| يك دهه و نه | دو دهه و نه | سه دهه و نه | و غیره        |

و به همین ترتیب تا نه دهه و نه و پس از آن ده دهه .

عدد ده دهه را صد (يك سده) می نامند و آن را واحد مرتبه سوم یا مرتبه سدهگان (مآت) قرار می دهند . پس، اعداد بعد از صد عبارتند از: يك سده و يك ؛ يك سده و دو... تا يك سده و نه دهه و نه و پس از آن ، دوسده و دوسده و يك و غیره .

عدد ده سده را هزار می نامند و آن را واحد مرتبه چهارم یا مرتبه هزارگان قرار می دهند .

برای نامیدن اعداد بعد از هزار، کافی است آحاد مرتبه های بعدی را اسم بگذاریم و اگر چه برای این کار می توانیم کلمات جدیدی اختیار کنیم، با این حال به این طریق حداقل کلمات ممکن را بکار می بریم:

واحد مرتبه پنجم را ده هزار و واحد مرتبه ششم را صد هزار می نامیم و به جای آنکه مرتبه هفتم را هزار هزار بخوانیم، آن را میلیون می نامیم و آحاد مرتبه های بعدی را مرتباً ده میلیون و صد میلیون و هزار میلیون یا بلیون یا میلیارد و غیره می خوانیم .

برای آنکه در نامگذاری فوق نظم و ترتیب کاملی برقرار باشد ، به طریق زیر مرتبه ها را طبقه بطبقه تقسیم بندی می کنیم :

|             |                                          |
|-------------|------------------------------------------|
| يكان*       | } طبقه اول یا طبقه يكان مرکب است از      |
| دهگان       |                                          |
| صدگان       |                                          |
| هزارگان     | } طبقه دوم یا طبقه هزارگان عبارت است از  |
| ده هزارگان  |                                          |
| صد هزارگان  |                                          |
| میلیونها    | } طبقه سوم یا طبقه میلیونها عبارت است از |
| ده میلیونها |                                          |
| صد میلیونها |                                          |

به این ترتیب، فقط برای هر طبقه جدید، احتیاج به يك لغت تازه داریم .

طبقه چهارم طبقه بلیونها و طبقه پنجم طبقه تریلیونها است و غیره . چنانکه ملاحظه می شود، تقریباً با بیست کلمه جمیع اعدادی را که حتی از احتیاجات زندگی متجاوز هستند ، نامگذاری کردیم و البته این صرفه جویی در کلمات شایان توجه است .

**تبصره -** در نتیجه کثرت استعمال ، بعضی لغات به جای اسامی برخی اعداد بکار می روند. مانند یازده به جای يك دهه و يك، و بیست

به جای **دو دهه** ، و **دویست** به جای **دوسده** و غیره . ما این لغات را دانسته فرض کرده و از تکرار آنها خودداری می کنیم .

**۶- شمار کتبی** - منظور از شمار کتبی این است که به کمک عدّه کمی از علامات ، جمیع اعداد را بنویسیم .

**۷- ارقام (پیکرها)** - برای نوشتن جمیع اعداد فقط ده علامت که هر يك از آنها را **يك رقم** می نامند وضع شده است .

۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰  
 صفر\* يك دو سه چهار پنج شش هفت هشت نه

**۸- قوانین شمار کتبی\*\*** - برای نوشتن اعداد در دستگاه اعشاری، قاعده های کتبی زیر بکار می رود :

**الف -** هر عدد را به وسیله ارقامی که در دنبال یکدیگر قرار می دهند ، می نویسند .

**ب -** اولین رقم سمت راست، شماره یکان عدد و رقم دوم سمت

\* صفر، عربی و به معنی تهی یا خالی است و کلمه فرانسوی **Zéro** در اصل ایتالیایی است و آن خود مأخوذ از کلمه صفر عربی است. يك نفر هندی که تاریخ نام او را ثبت نکرده است، در قرنهای اولیه میلاد مسیح این علامت را برای محفوظ نگاه داشتن جای مرتبه ای که در عدد ناقص باشد، اختراع کرده است. استاد ابوریحان بیرونی در کتاب التفهیم چنین می نویسد: «چون مرتبه ای خالی باشد از عددی به جای اونشانی کنند از بهر نگاه داشتن او را که تهی است. و ما او را دایره خرد کنیم و او را صفر نام کنیم یعنی تهی و هندوان او را نقطه کنند». \*\* طرز نوشتن يك عدد معلوم و خواندن يك عدد نوشته شده را دانسته فرض کرده از ذکر آنها خودداری کردیم .

راست، شماره دهگان عدد و رقم سوم سمت راست ، شماره صدگان عدد است و به همین ترتیب .

**ج -** بطور کلی ، هر رقم که در سمت چپ رقم دیگر نوشته شود ، شماره یکان يك مرتبه بالاتر را می رساند .

**د -** هر يك از مرتبه های عدد ناقص باشد ، به جای آن صفر قرار می دهند .

**۹- قدر مطلق و قدر نسبی يك رقم** - در عدد ۶۲۳۱ رقم ۲ نماینده ۲۰۰ یکان است ؛ می گویند که در این عدد ، **قدر نسبی** رقم ۲ مساوی است با ۲۰۰ ، در صورتی که ۲ را **قدر مطلق** رقم ۲ می نامند. در همین مثال ، قدر مطلق رقم ۶ همان ۶ و قدر نسبی آن، ۶۰۰۰ است .

**۱۰- حروف و علامتها** - هرگاه در استدلالها مقدار يك عدد یا خواص آن مورد نظر نباشد، آن عدد را غالباً به وسیله یکی از حروف الفبای لاتین نشان می دهیم، و مقصود از این کار آن است که قضایا و نتایج آنها را تعمیم داده استدلال را ساده تر بیان کنیم .

تمام علامتهایی که در علم جبر بکار می روند، در حساب استدلالی نیز به همان صورت استعمال می شوند ؛ مانند :

= مساوی است با

$a > b$  ،  $a$  بزرگتر است از  $b$

$\neq$  مخالف است با

$c \leq b$  ،  $c$  کوچکتر است از  $b$  یا با آن مساوی است .

۱۱- اعداد متساوی و نامتساوی - فرض کنیم می‌خواهیم يك عده مداد را بین چند نفر قسمت کنیم؛ اگر پس از آنکه به هر نفر يك مداد دادیم مدادها تمام شد، می‌گوییم عده (عدد) مدادها با عده (عدد) نفرها برابر است؛ در این صورت، اگر عده نفرها را  $a$  و عده مدادها را  $b$  بنامیم،  $b = a$ .

این رابطه را يك تساوی و  $a$  و  $b$  را دو عضو آن می‌نامند. اگر پیش از آنکه به هر نفر يك مداد برسد مدادها تمام شد، می‌گوییم عده مدادها از عده نفرها کوچکتر است و می‌نویسیم  $b < a$ ؛ یا می‌گوییم عده نفرها از عده مدادها بزرگتر است و می‌نویسیم  $a > b$ . هر يك از دو رابطه  $b < a$  و  $a > b$  را يك نامساوی و  $a$  و  $b$  را دو عضو آن می‌نامند.

### تمرین

(در اغلب تمرینهای زیر، اعمال چهارگانه جمع و تفریق و ضرب و تقسیم دانسته فرض شده‌اند).

- ۱- بزرگترین طبقه يك عدد ۷ رقمی چیست؟ آیا این طبقه کامل است؟
- ۲- بزرگترین عدد پنج رقمی کدام است؟ کوچکترین عدد پنج رقمی چیست؟ چند عدد پنج رقمی داریم؟ (جواب: ۹۰۰۰۰)
- ۳- برای نوشتن اعداد از يك تا صد و خود صد، چند رقم لازم است؟ همچنین برای نوشتن اعداد از يك تا ۱۰۰۰ و خود هزار؟ (جواب: ۱۹۲-۲۸۹۳)
- ۴- چند عدد يك رقمی یا دورقمی یا سه رقمی یا بطور کلی  $n$  رقمی داریم؟ (جواب: ۹ يك رقمی، ۹۰ دورقمی، ۹۰۰ سه رقمی)

- ۵- چند رقم برای نمره گذاری صفحات کتابی که دارای ۳۰۴ صفحه است لازم است؟ (جواب: ۸۰۴ رقم)
- ۶- برای نمره گذاری صفحات کتابی ۳۸۹۷ رقم بکار رفته است؛ صفحات این کتاب چقدر است؟ (جواب: ۱۲۵۱ صفحه)
- ۷- سلسله دسیه اعداد را از يك تا ۸۵۳۷ (و خود این عدد را) بدون جدا کردن ارقام در پی یکدیگر نوشته‌ایم؛ اولاً چند رقم نوشته‌ایم؟ ثانیاً رقم ۱۱۳۴۷ از این سلسله چیست؟ (جواب: اولاً ۳۳۰۴۱ رقم. ثانیاً رقم مطلوب ۸ و متعلق به عدد ۴۸۶۴ است.)
- ۸- عدد ۶۵۸۷۴ مفروض است؛ اگر يك یا دویا . . . صفر ما بین ارقام ۸ و ۷ آن قرار دهیم، چقدر به این عدد افزوده می‌شود؟ (جواب: اگر يك صفر قرار دهیم  $۶۵۸ \times ۹۰۰$  به عدد مفروض اضافه می‌شود.)

**تبصره -** هرگاه به عددی اشیای يك دسته چیزی بیفزاییم ، عدد

$$\boxed{a + 0 = a} \quad \text{آن تغییر نمی کند . پس می توان نوشت :}$$

به همین ترتیب ، واضح است اگر در يك جعبه خالی  $a$  شیء بریزیم ،

$$\boxed{0 + a = a} \quad \text{جعبه دارای } a \text{ شیء است . یعنی داریم :}$$

**۱۳- مجموع چند عدد -** مجموع چند عدد را مانند مجموع

دو عدد تعریف می کنیم :

اگر اعداد  $a$  و  $b$  و  $c$  ... عددی اشیای چند دسته شیء باشند ، مجموع یا حاصل جمع این اعداد عبارت است از عددی اشیایی که از روی هم ریخته تمام اشیای دسته های مفروض پدید می آید . جمع کردن چند عدد ، یعنی بدست آوردن مجموع آنها \* .

هر يك از اعداد  $a$  و  $b$  و  $c$  ... را جمله یا جزء جمع می نامند . بدیهی است که اگر ابتدا  $a$  شیء دسته اول با  $b$  شیء دسته دوم را روی هم بریزیم و به مجموع آنها  $c$  شیء دسته سوم را بیفزاییم ، یا اینکه ابتدا مثلاً  $c$  شیء دسته سوم را با  $a$  شیء دسته اول روی هم ریخته به مجموع آنها  $b$  شیء دسته دوم را بیفزاییم ، در هر دو حالت نتیجه یکی است (فرض می کنیم که در ضمن این عمل ، عددی اشیای دسته های مختلف کم یا زیاد نشود) . پس می توان قضیه زیر را بیان کرد :

**قضیه -** مجموع چند عدد ، به ترتیب آنها بستگی ندارد .

$$\boxed{a + b + c + d = b + d + a + c} \quad \text{مثلاً داریم :}$$

\* جمع کردن = افزودن = اضافه کردن = علاوه کردن .

## چهار عمل اصلی

۱ = جمع

**۱۲- مجموع دو عدد -** دو دسته از اشیای هم نوع (مانند دو

دسته مداد) را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که عددی اشیای دسته اول  $a$  و عددی اشیای دسته دوم  $b$  باشد ؛ اگر این دو دسته شیء را با هم مخلوط کنیم ، دسته سوم پدید می آید که آن را مجموع یا حاصل جمع دو دسته اول می نامند . حال اگر عددی اشیای دسته مجموع را  $c$  فرض کنیم ، عدد  $c$  را مجموع اعداد  $a$  و  $b$  می نامند و می نویسند :

$$c = a + b$$

$$c = b + a$$

یا

از این تعریف نتیجه می شود که مجموع دو عدد ، بستگی به ترتیب آنها ندارد . یعنی اگر  $a$  را با  $b$  یا  $b$  را با  $a$  جمع کنیم ، نتیجه یکی است . در واقع ، چه اشیای دسته اول را روی اشیای دسته دوم بریزیم و چه بعکس عمل کنیم نتیجه یکی است .

**تعریف -** اگر اعداد  $a$  و  $b$  شماره های دو دسته شیء باشند ، مجموع این دو عدد عبارت است از عددی اشیایی که از مخلوط کردن اشیای دو دسته مزبور پدید می آید . مجموع دو عدد بستگی به ترتیب آنها ندارد .

$$a + b = b + a$$

۱۴ = از تعریف شماره قبل ، نتایج زیر حاصل می شود :

الف - در مجموع چند عدد، می توان به جای يك عده از آنها حاصل

جمع آنها را قرار داد. مثلاً داریم :

$$a+b+c+d=(a+b+d)+c$$

(هروقت چند عمل را داخل يك پراثر قرار دهیم، منظور این است

که آن اعمال را انجام شده فرض کرده ایم) .

ب - برای آنکه چند مجموع را با هم جمع کنیم، کافی است تمام جمله های

آنها را با هم جمع کنیم، یعنی :

$$(a+b+c)+(e+f)=a+b+c+e+f$$

ج - در مجموع چند عدد، می توان به جای هر يك از آنها اعدادی را که

مجموعشان مساوی با همان عدد باشد، قرار داد. یعنی اگر داشته باشیم:

$$b=\alpha+\beta$$

$$a+b+c=a+\alpha+\beta+c$$

داریم :

تبصره - خواص فوق که برای مجموع چند عدد ذکر کردیم ،

همواره در محاسبات بکار می رود .

مثال ۱ - هر عدد مساوی است با مجموع قدرنسی ارقام آن .

$$۶۷۹۳=۶۰۰۰+۷۰۰+۹۰+۳$$

مثال ۲ - برای تعیین عده\* آحاد هر مرتبه از يك عدد، کافی است

ارقامی را که نماینده آحاد مراتب کمتر از مرتبه مزبورند، حذف کنیم.

مثلاً عده سدگان عدد ۶۵۹۲۱ عبارت است از ۶۵۹؛ زیرا می توان نوشت:

$$۶۵۹۲۱=۶۵۹۰۰+۲۱$$

\* عده را با رقم اشتباه نکنید .

۱۵ - عمل جمع - مسئله - چند عدد مفروضند ؛ می خواهیم

مجموع آنها را پیدا کنیم. (فرض می کنیم که مجموع دو عدد يك رقمی را

همواره در خاطر داریم) .

مثال - می خواهیم مجموع  $S=۶۸۳۲+۴۲۵$  را حساب کنیم .

می توان نوشت :

$$۶۸۳۲=۶۰۰۰+۸۰۰+۳۰+۲$$

$$۴۲۵=۴۰۰+۲۰+۵$$

یعنی :

$$۶۸۳۲=۶\text{ هزار}+۸\text{ سده}+۳\text{ دهه}+۲$$

$$۴۲۵=۴\text{ سده}+۲\text{ دهه}+۵$$

نظر به شماره ۱۳ می توان نوشت :

$$S=۶\text{ هزار}+(۸\text{ سده}+۴\text{ سده})+(۳\text{ دهه}+۲\text{ دهه})+(۲+۵)$$

یعنی آحاد هر مرتبه را با هم جمع می کنیم .

$$S=۶\text{ هزار}+۷\text{ دهه}+۵\text{ سده}+۱۲\text{ سده}+۶\text{ هزار}$$

$$=۶\text{ هزار}+۷\text{ دهه}+۲\text{ سده}+۱۰\text{ سده}+۱\text{ يك هزار}+۶\text{ هزار}$$

$$=۷۲۵۷=۷\text{ دهه}+۵\text{ سده}+۲\text{ سده}+۷\text{ هزار}$$

و از اینجا قاعده عمل جمع نتیجه می شود :

$$۶۸۳۲+$$

$$۴۲۵$$

$$\hline ۷۲۵۷$$

۱۶ - قاعده عمل جمع - برای محاسبه مجموع چند عدد، آنها را

طوری زیر یکدیگر می نویسیم که ارقام هر مرتبه محاذی یکدیگر و در يك

ستون قائم قرار گیرند! آن وقت، عملی افقی زیر آنها رسم کرده از دست راست شروع به جمع می‌کنیم، به این ترتیب که مجموع ارقام هر ستون را بدست می‌آوریم.

اگر این مجموع از ۹ کوچکتر بود، آنرا زیر همان ستون می‌نویسیم؛ و اگر این مجموع از ۹ بزرگتر بود، فقط یکان آنرا نوشته شماره دهگان آن را با ارقام مرتبه بعد جمع می‌کنیم و عمل را ادامه می‌دهیم و وقتی که به آخرین ستون سمت چپ رسیدیم، مجموع حاصل را هرچه بود درست چپ حاصلهای ماقبل می‌نویسیم تا مجموع بدست آید.

## ۲- تفریق

**۱۷- تفاضل دو عدد و خواص آن** - واضح است که مجموع دو عدد که هیچکدام از آنها مساوی صفر نباشد، از هر يك از آن دو عدد بزرگتر است. حال دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  را در نظر گرفته فرض می‌کنیم که  $a > b$ ، و سلسله نامحدود زیر را از اعداد صحیح بزرگتر از  $b$  تشکیل می‌دهیم:

$$b+1 \text{ و } b+2 \text{ و } b+3 \text{ و } \dots \text{ و } b+r \text{ و } b+r+1 \text{ و } \dots$$

بدیهی است که چون  $a$  از  $b$  بزرگتر است، ناچار عدد  $a$  مساوی با یکی از اعداد این سلسله است. مثلاً فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$a = b + r$$

بنابراین، عدد صحیحی مانند  $r$  وجود دارد که اگر آن را به  $b$  اضافه‌کنیم، حاصل مساوی با  $a$  شود و البته این عدد منحصر بفرد است. عدد  $r$  را تفاضل عدد  $b$  از عدد  $a$  یا زیادتى عدد  $a$  بر عدد  $b$  (یا تفاوت  $a$  و  $b$ ) می‌نامند و می‌نویسند:  $r = a - b$ ؛ پس می‌توان گفت:

**تعریف** - هرگاه دو عدد غیرمتساوی را در نظر بگیریم، همواره يك عدد (و فقط یکی) می‌توان چنان یافت که اگر آن را با عدد کوچکتر جمع کنیم، عدد بزرگتر حاصل شود. این عدد را تفاضل عدد کوچکتر از عدد بزرگتر می‌نامند.

**۱۸- تفریق\*** عملی است که به وسیله آن، تفاضل دو عدد معلوم را می‌توان بدست آورد و در این مقام، عدد بزرگتر را **مفروق منه** و عدد کوچکتر را **مفروق** و تفاضل را **باقیمانده** تفریق می‌نامند.

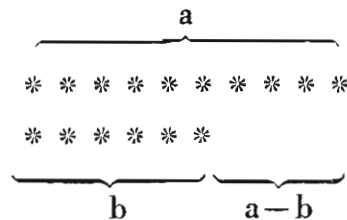
**تبصره ۱-** از تساوی  $a = b + r$  بر می‌آید که  $b$  نیز تفاضل مابین  $a$  و  $r$  است؛ و بنابراین، می‌توان نوشت:  $b = a - r$ .

**تبصره ۲-** از تساوی تبصره شماره ۱۲ ( $a = a + 0$ ) نتیجه می‌شود:

$$a - a = 0$$

و نظر به تبصره (۱) نیز می‌توان نوشت:  $a - 0 = a$ .

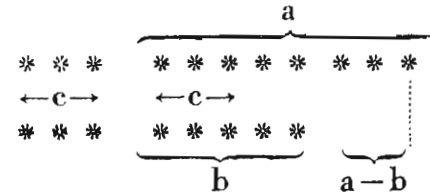
**تبصره ۳-** برای بدست آوردن تفاضل دو عدد، می‌توان آن دو عدد را به وسیله نقاط یا علامتی مجسم کرد و آحاد کوچکتر را مقابل آحاد بزرگتر نوشت؛ در این صورت، آحادی از عدد بزرگتر که چیزی در مقابل ندارند، تفاضل دو عدد را تشکیل می‌دهند.



این ملاحظه ساده را در استدلال بعضی قضایای مربوط به تفریق بکار خواهیم برد.

**۱۹- خواص تفاضل دو عدد - قضیه ۱-** هرگاه به مفروق منه و مفروق، يك عدد بیفزاییم (یا در صورت امکان از آنها يك عدد بکاهیم) تفاضل تغییر نمی‌کند.

\* (تفريق کردن = کاستن = کم کردن = منها کردن).

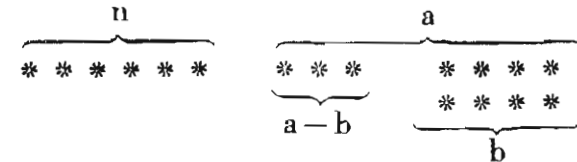


از روی شکل فوق، بخوبی واضح است که :

$$\begin{aligned} (a+c)-(b+c) &= a-b \\ (a-c)-(b-c) &= a-b \end{aligned}$$

پس از آنکه  $a-b$  معین شد، اگر  $c$  را به  $a$  و  $b$  بیفزاییم یا اگر  $c$  را از  $a$  و  $b$  کم کنیم،  $a-b$  تغییر نمی کند.

**۲۰- قضیه ۲-** برای آنکه تفاضل دو عدد را به عدد مفروض  $n$  بیفزاییم، می توانیم مفروق منه را به  $n$  افزوده از حاصل، مفروق را بکاهیم.



$$\begin{aligned} \leftarrow n+(a-b) \rightarrow \\ \leftarrow n+a-b \rightarrow \end{aligned}$$

از روی شکل فوق، معلوم می شود که نتیجه دو عمل زیر، یکی است :

دفعه اول  $b$  را از  $a$  کم می کنیم تا  $a-b$  بدست آید. بعد  $n$  را با این تفاضل جمع می کنیم، حاصل می شود :  $n+(a-b)$ .

دفعه دوم  $a$  را با  $n$  جمع می کنیم حاصل می شود  $n+a$  و از این حاصل جمع  $b$  را کم می کنیم مقدار  $n+a-b$  بدست می آید.

$$n+(a-b)=n+a-b$$

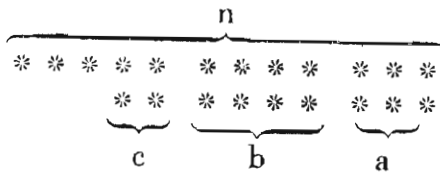
پس داریم :

**۲۱- قضیه ۳-** برای آنکه مجموع چند عدد را از عدد مفروض  $n$  کم کنیم، می توانیم یکی از عوامل جمع را از عدد مفروض کم کرده از حاصل عامل دیگر را کم کنیم و عمل را به همین ترتیب ادامه دهیم تا تمام عوامل جمع متوالیاً از عدد  $n$  کم شوند.

$$n-(a+b+c)=n-a-b-c$$

یعنی داریم :

(این قضیه در صورتی مورد دارد که  $n$  از  $a+b+c$  بزرگتر باشد).



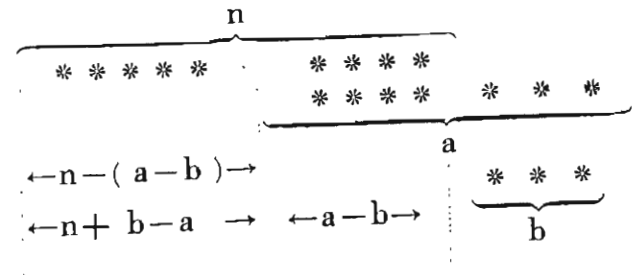
این قضیه تقریباً بدیهی است :

اگر  $n$  شیء داشته باشیم و بخواهیم  $a+b+c$  شیء از روی آن برداریم، می توانیم ابتدا  $a$  شیء برداشته بعد  $b$  شیء و سپس از حاصل  $c$  شیء برداریم.

**۲۲- قضیه ۴-** برای آنکه تفاضل دو عدد را از عدد مفروض  $n$  کم کنیم می توانیم مفروق را به  $n$  بیفزاییم و مفروق منه را از حاصل بکاهیم. یعنی داریم :

$$n-(a-b)=n+b-a$$

(این قضیه در صورتی مورد دارد که  $a-b$  از  $n$  کوچکتر باشد).



از روی شکل فوق پیداست که نتیجه دو عمل زیر یکی است :  
دفعه اول تفاضل  $a - b$  را پیدا کرده آن را از  $n$  کم می کنیم حاصل می شود :  $n - (a - b)$  .

دفعه دوم  $b$  را به  $n$  افزوده از حاصل  $a$  را کم می کنیم بدست می آید :

$$n + b - a$$

۲۳- قضیه - یک سلسله اعمال جمع و تفریق را می توان به دو جمع و یک تفریق تبدیل کرد.

عبارت  $a - b + c - d - e$  را در نظر می گیریم. معنی این عبارت آن است که ابتدا باید  $b$  را از  $a$  کم کرد و حاصل را به  $c$  افزود و از این حاصل  $d$  را کم کرد و سپس از حاصل جدید  $e$  را تفریق کرد .

البته این عبارت وقتی معنی دارد که تفریقهای متوالی ممکن باشند. در این صورت می خواهیم ثابت کنیم که :

$$(۱) \quad a - b + c - d - e = (a + c) - (b + d + e)$$

برهان - یک دسته از اشیای هم نوع، مثلاً یک دسته مداد را در نظر می گیریم و عددها آنها را به اندازه کافی بزرگ فرض می کنیم . حال می توان عبارت  $a - b + c - d - e$  را چنین حساب کرد :

ابتدا  $a$  مداد روی یک میز می گذاریم و بعد  $b$  مداد از روی میز برمی داریم . دومرتبه  $c$  مداد روی میز می گذاریم و بعد یک دفعه  $d$  مداد و یک دفعه  $e$  مداد از روی میز برمی داریم . عددها مدادهایی که روی میز باقی می ماند عبارت است از  $a - b + c - d - e$  . ولی کاملاً واضح است که عددها مدادهایی که روی میز گذاشته ایم  $a + c$  بوده و عددها مدادهایی را که از روی میز برداشته ایم  $b + d + e$  است . پس عددها مدادهایی که روی میز مانده عبارت است از  $(a + c) - (b + d + e)$  و رابطه ۱ صحیح است .

۲۴- قضیه - برای آنکه مجموع چند عدد را از مجموع چند عدد دیگر کم کنیم ، می توانیم ( در صورت امکان ) هر یک از جمله های مجموع اول را از بعضی از جمله های مجموع دوم کم کرده باقیمانده را با بقیه جمله های مجموع دوم جمع کنیم.

$$(۹ + ۱۵ + ۱۸) - (۷ + ۵) = \text{مثال:}$$

$$(۹ - ۷) + (۱۵ - ۵) + ۱۸ = ۲ + ۱۰ + ۱۸ = ۳۰$$

در واقع تمام آحاد مجموع دوم از مجموع اول کم می شود و ضمناً جز آحاد مجموع دوم واحد دیگری از مجموع اول کسر نمی شود.

۲۵- عمل تفریق - مسئله - دو عدد مفروضند می خواهیم تفاضل این دو عدد را بدست آوریم.

مثال ۱- می خواهیم تفاضل  $D = ۹۷۳ - ۶۱$  را حساب کنیم .

می توان نوشت :

$$۹۷۳ = ۳ + ۷۰ + ۹۰۰$$

$$۶۱ = ۱ + ۶۰$$

نظر به قضیه شماره ۲۳

$$2 + 1 \text{ دهه} + 9 \text{ سده} = (3 - 1) + (6 \text{ دهه} - 7 \text{ دهه}) + 9 \text{ سده} = 61 - 973 = 912$$

ممکن است اتفاق افتد که یکی از تفریقهای جزئی ممکن نباشد.

**مثال ۲-** می خواهیم تفاضل  $837 - 265 = D$  را حساب کنیم. می توان نوشت:

$$837 - 265 = (8 \text{ سده} + 3 \text{ دهه} + 7) - (2 \text{ سده} + 6 \text{ دهه} + 5) \\ = (8 \text{ سده} - 2 \text{ سده}) + (3 \text{ دهه} - 6 \text{ دهه}) + (7 - 5)$$

چون تفریق  $(6 \text{ دهه} - 3 \text{ دهه})$  ممکن نیست، ۱۰ دهه به مفروق مندرج و به جای آن یک سده به مفروق اضافه می کنیم (شماره ۱۹):

$$837 - 265 = (8 \text{ سده} + 13 \text{ دهه} + 7) - (3 \text{ سده} + 6 \text{ دهه} + 5) \\ = (8 \text{ سده} - 3 \text{ سده}) + (13 \text{ دهه} - 6 \text{ دهه}) + (7 - 5) \\ = 5 \text{ سده} + 7 \text{ دهه} + 2 = 572$$

و از اینجا قاعده عمل تفریق نتیجه می شود:

|       |       |
|-------|-------|
| ۹۷۳ - | ۸۳۷ - |
| ۶۱    | ۲۶۵   |
| ۹۱۲   | ۵۷۲   |

**قاعده عمل تفریق -** برای تفریق کردن دو عدد چند رقمی، عدد کوچکتر را طوری زیر عدد بزرگتر می نویسیم که ارقام هر مرتبه محاذی یکدیگر و در یک ستون قرار گیرند. آن وقت خطی افقی زیر آنها کشیده از سمت راست شروع به تفریق می کنیم، به این ترتیب که هر رقم عدد کوچکتر را از رقم نظیرش در عدد بزرگتر کم می کنیم و حاصل را زیر

همان سده می نویسیم. در صورتی که رقم مفروق از نظیر خود در مفروق مندرج بزرگتر باشد، ده واحد بر رقم مفروق منه می افزاییم و در عوض یک واحد بر رقم مرتبه مفروق در مفروق، علاوه می کنیم تا تفاضل تغییر نکند.

**۲۶- امتحان عمل تفریق -** باید مجموع عدد کوچکتر و تفاضل مساوی با عدد بزرگتر باشد. یا اگر تفاضل را از عدد بزرگتر کم کنیم عدد کوچکتر حاصل شود (چرا؟).

### ۳- تساوی و نامساوی

تعریف تساوی و نامساوی را در شماره ۱۱ دیده ایم و در اینجا بعضی قضایای مربوط به تساویها و نامساویها را ذکر می کنیم. این قضایا بدیهی هستند و فقط به بیان آنها اکتفا می کنیم. (به شماره ۳۸ و تبصره ۲ شماره ۶۱ نیز مراجعه کنید).

**۲۷- قضیه -** می توان یک عدد را به دو طرف یک تساوی (یا یک نامساوی) افزود و همچنین در صورت امکان یک عدد را از دو طرف یک تساوی (یا یک نامساوی) کم کرد.

یعنی اگر داشته باشیم  $a = b$ ، داریم:  $a + c = b + c$  و  $a - c = b - c$  و اگر داشته باشیم  $a > b$ ، داریم:  $a + c > b + c$  و  $a - c > b - c$  (البته در صورتی که تفریقها ممکن باشند).

**۲۸- قضیه -** اگر عضوهای دو تساوی را نظیر بنظر با یکدیگر جمع یا از یکدیگر تفریق کنیم باز هم یک تساوی بدست می آید.

یعنی اگر داشته باشیم:  $a = b$  و  $a' = b'$

داریم:  $a + a' = b + b'$

و اگر  $a > b$  باشد نیز داریم:  $a - a' = b - b'$

**۲۹- قضیه -** می توان اعضای متناظر دو یا چند نامساوی متحدالجهت

را با یکدیگر جمع کرد.

یعنی اگر داشته باشیم:

$$a < a' \quad \text{و} \quad b < b' \quad \text{و} \quad c < c'$$

$$a + b + c < a' + b' + c'$$

داریم:

$$b = a + d \quad \text{تبصره - از يك تساوی مانند:}$$

$$b > a \quad \text{می توان نتیجه گرفت:}$$

$$b = a + d \quad \text{و برعکس از نامساوی } b > a \text{ می توان نتیجه گرفت:}$$

$$d \text{ (تفاضل } a \text{ و } b \text{ است) (به شماره ۳۸ و تبصره ۲ شماره ۶۱ مراجعه شود).}$$

### مسائل مربوط به جمع و تفریق \*

۱- چرا اعمال جمع و تفریق را از سمت راست اعداد شروع می کنند؟

۲- در موقع جمع چند عدد مجموع ارقام هر ستون را زیر همان ستون نوشته از طرف راست به چپ اعداد ۱۴ و ۱۱ و ۹ را بدست آورده ایم. مطلوب است تعیین حاصل این جمع.

۳- در موقع تفریق عدد ۲۷۹۲ از عدد ۳۲۴۱ تمام باقیمانده های جزء (ده بریکها) فراموش شده است. بدون آنکه عمل تفریق را انجام دهید، معین کنید که تفاوت نتیجه ای که بدست آمده با تفاضل واقعی دو عدد چقدر است؟

(جواب: ۱۱۱۰)

۴- مطلوب است تعیین دو عدد صحیح متوالی که مجموع آنها ۲۷۵ باشد.

(جواب: ۱۳۷ و ۱۳۸)

۵- مطلوب است تعیین سه عدد صحیح متوالی که مجموع آنها ۲۱۹ باشد.

(جواب: ۷۲ و ۷۳ و ۷۴)

۶- مطلوب است تعیین دو عدد که مجموع آنها  $s$  و تفاضل آنها  $d$  معلوم باشد.

$$d = 4 \text{ و } s = 58$$

جواب: اگر عدد بزرگتر را  $a$  و عدد کوچکتر را  $b$  بنامیم:

\* در اغلب این مسائل اعمال ضرب و تقسیم نیز دانسته فرض شده اند.

$$b = \frac{s-d}{2} \quad \text{و} \quad a = \frac{s+d}{2}$$

۷- مطلوب است تعیین سه عدد که مجموع آنها ۵۸۵، اولی از دومی ۲۶۳ واحد بیشتر، و دومی از سومی ۹۲ واحد زیادتر باشد.

(جواب: ۴۰۱ و ۱۳۸ و ۴۶)

۸- مطلوب است تعیین سه عدد که اگر آنها را دبدو جمع کنیم اعداد

۷۱ و ۶۴ و ۴۱ بدست آیند.

(جواب: ۱۷ و ۲۴ و ۴۷)

۹- تفاضل دو عدد ۱۸ است و اگر به هر يك از آنها ۴ بیفزاییم عدد بزرگتر

۴ برابر عدد کوچکتر می شود. این دو عدد را تعیین کنید.

(جواب: ۲ و ۲۰)

۱۰- عددی از سه رقم متوالی تشکیل شده است. ثابت کنید که تفاضل

این عدد و عددی که با همان ارقام ولی بعکس ترتیب نوشته شود همواره مساوی

۱۹۸ می باشد. راهنمایی - اگر عدد اول را به صورت:

$$(a+2) \times 100 + (a+1) \times 10 + a \times 100$$

می شود:

$$a \times 100 + (a+1) \times 10 + (a+2)$$

۱۱- ثابت کنید که اگر ترتیب نوشتن ارقام يك عدد دو رقمی را عوض

کنیم این عدد به اندازه ۹ برابر تفاضل مقادیر مطلق دو رقمش زیاد یا کم می شود.

راهنمایی - اگر عدد مفروض را به صورت  $10d + u$  بنویسید عدد

$$10u + d$$

۱۲- مطلوب است تعیین يك عدد دو رقمی در صورتی که می دانیم که

مجموع ارقام آن ۱۴ و اگر عدد مفروض را به عکس ترتیب بنویسیم عددی حاصل

می شود که تفاضلش با عدد مفروض ۳۶ است (از مسئله قبل استفاده کنید).

(جواب: ۵۹ یا ۹۵)

۱۳- عددی سه رقمی را از مقلوب آن کم کرده ایم و تفاضل را با مقلوب

خودش جمع کرده ایم مطلوب است نتیجه آخر.

(جواب: ۱۰۸۹)

۱۴- شخصی در قرن چهاردهم متولد شد و ۹۰ سال عمر کرد، اگر عدد

سال مرگ او مقلوب عدد سال تولدش باشد، ببینید در چه سالی متولد شده است؟

### ۴- ضرب

۳۰- حاصل ضرب دو عدد - تعریف - حاصل ضرب عدد  $a$

در عدد  $b$  عبارت است از مجموع  $b$  عدد مساوی با  $a$ .

مساوی با صفر شود و سایر قرارداد می نویسیم :

$$a \times 0 = 0 \quad , \quad a \times 1 = a$$

$$a \times b = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_b \text{ مرتبه}$$

مثلاً اگر بنویسیم  $2 \times 3$  عدد سه مضروب و عدد ۲ مضروب فیه است  
و اگر بنویسیم  $3 \times 2$  عدد ۲ مضروب و عدد ۳ مضروب فیه است و نظر به  
تعریف داریم:

$$3 \times 2 = 3 + 3$$

**تبصره ۱ -** از تعریف فوق معلوم می‌شود که ضرب حالت خاصی است از جمع که در آن تمام عوامل جمع با هم مساویند.

$$\backslash \times m = m$$
$$\circ \times m = \circ$$

\* ضرب چیست؟ عدد را چندبار عدد دیگر کردن است (از کتاب التفهیم).

۳۱ - قضیه - حاصل ضرب عدد  $a$  در عدد  $b$  مساوی است با حاصل ضرب عدد  $b$  در عدد  $a$  . یعنی داریم :  $a \times b = b \times a$

حال از يك طرف چون جدول دارای  $b$  سطر است که هر کدام دارای  $a$  مرتبه يك است، عدد يكهای این جدول برابر است با :

$a \times b$  یعنی

$b \times a$        $\overbrace{b + b + \dots + b}^{\text{a مرتبه}}$       یعنی

و چون شماره یکهای جدول در هر دو حالت یکی است ، داریم :

$$a \times b = b \times a$$

**۳۲- تعریف -** چون نظر به قضیه قبل می توان جای مضروب و مضروب فیه را بدون تغییر دادن حاصل ضرب عوض کرد، از این پس آنها را از یکدیگر متمایز نکرده هر يك را عامل ضرب (فاکتور) می نامیم .  
با این تعریف می توان قضیه (۳۱) را به عبارت زیر بیان کرد :  
اگر جای عوامل ضرب را تغییر دهیم حاصل ضرب تغییر نمی کند.

**تبصره -** قراردادهایی که در تبصره ۴ شماره ۳۵ قبول کردیم با قضیه ۳۱ وفق می دهند :

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

و بنا بر این می توان گفت :

برای آنکه حاصل ضرب دو عامل صفر باشد، لازم و کافی است که یکی از آن عوامل صفر باشد .

**۳۳- حاصل ضرب مجموع چند عدد یا تفاضل دو عدد در يك عدد -** قضیه - برای آنکه مجموع چند عدد را در يك عدد ضرب کنیم، می توانیم هر يك از جمله های مجموع را در آن عدد ضرب کرده حاصلها را با هم جمع کنیم .

**برهان -** حاصل ضرب  $a+b+c$  در عدد  $m$  عبارت است از :

$$P = (a+b+c) \times m = \underbrace{(a+b+c) + (a+b+c) + \dots + (a+b+c)}_{m \text{ مرتبه}}$$

و نظر به قضیه شماره ۱۳

$$P = \underbrace{a+a+\dots+a}_{m \text{ مرتبه}} + \underbrace{b+b+\dots+b}_{m \text{ مرتبه}} + \underbrace{c+c+\dots+c}_{m \text{ مرتبه}}$$

$$P \quad a \times m + b \times m + c \times m \quad \text{یا} :$$

$$\boxed{(a+b+c)m = am + bm + cm} \quad \text{پس داریم} :$$

**۳۴ - قضیه -** برای آنکه يك عدد را در مجموع چند عدد ضرب کنیم می توانیم آن عدد را در هر يك از جمله های مجموع ضرب کرده حاصلها را با هم جمع کنیم .

$$m \times (a+b+c) = (a+b+c)m = am + bm + cm$$

**۳۵ - قضیه -** برای آنکه تفاضل دو عدد را در يك عدد ضرب کنیم می توانیم مفروق منه و مفروق را در آن عدد ضرب کرده حاصلها را از هم کم کنیم .

**برهان -** می توان نوشت :

$$P = (a-b) \times m = \underbrace{(a-b) + (a-b) + \dots + (a-b)}_{m \text{ مرتبه}}$$

و نظر به قضیه شماره ۲۳

$$P = \underbrace{(a+a+\dots+a)}_{m \text{ مرتبه}} - \underbrace{(b+b+\dots+b)}_{m \text{ مرتبه}}$$

$$\boxed{(a-b) \times m = am - bm} \quad \text{پس داریم} :$$

**۳۶ - نتیجه -** برای آنکه يك عدد را در تفاضل دو عدد ضرب کنیم می توانیم آن عدد را در مفروق منه و مفروق ضرب کرده حاصلها را از هم کم کنیم .

در واقع نظر به قضیه (۳۱) داریم :

$$m \times (a-b) = (a-b) \times m = am - bm$$

**۳۷ - قضیه -** برای آنکه دو مجموع را در یکدیگر ضرب کنیم می توانیم هر يك از جمله های مجموع اول را در تمام جمله های مجموع دوم ضرب کرده حاصلها را با هم جمع کنیم .

برهان - می خواهیم مثلاً حاصل ضرب  $P = (a+b+c)(d+e)$

را حساب کنیم . نظر به شماره ۳۳ می توان نوشت :

$$a+b+c)(d+e) = (a+b+c) \times d + (a+b+c) \times e$$

و نظر به شماره ۳۳ داریم :

$$P = ad + bd + cd + ae + be + ce$$

و حکم ثابت است .

۳۸- تساوی و نامساوی - می توان دو طرف يك تساوی یا يك

نامساوی را در يك عدد ضرب کرد.

واضح است که اگر داشته باشیم :  $a = b$  ، داریم :  $ac = bc$

حال اگر فرض کنیم  $b > a$  می توان (نظر به تبصره شماره ۲۹) نوشت :

$$b = a + d \quad \text{و از آنجا} \quad bc = ac + dc$$

و بنابراین نظر به همان تبصره می توان نوشت :  $bc > ac$

پس اگر داشته باشیم :  $b > a$  ، داریم :  $bc > ac$

۳۹- حاصل ضرب چند عدد و خواص آن - تعریف - حاصل

ضرب چند عدد که به ترتیب معنی نوشته شده باشند عددی است که چنین بدست می آید :

نخستین عدد را در عدد دوم ضرب کرده حاصل را در عدد سوم ضرب می کنیم و همبسطور عمل را تا آخرین عدد ادامه می دهیم .

مثلاً برای محاسبه حاصل ضرب  $a \times b \times c \times d$  ، بتدریج چنین

عمل می کنیم .  $\alpha \times b = \alpha$  ،  $\alpha \times c = \beta$  ،  $\beta \times d = P$

بنا به تعریف  $P$  حاصل ضرب مطلوب است :  $P = a \times b \times c \times d$

هر يك از اعداد  $a$  ،  $b$  ،  $c$  و  $d$  را عامل ضرب می نامند .

تبصره - ملاحظه می کنیم که برای بدست آوردن حاصل ضرب

$a \times b \times c \times d$  کافی است که  $a \times b \times c$  را حساب کرده حاصل را در

$d$  ضرب کنیم ، یعنی داریم :  $a \times b \times c \times d = (abc) \times d$  پس :

در حاصل ضرب چند عامل می توان به جای  $n$  عامل اولیه ، حاصل

ضرب آنها را گذاشت .

۴۰- قضیه - حاصل ضرب چند عامل به ترتیب عوامل بستگی

ندارد .

برای اثبات این قضیه حالت های زیر را تشخیص می دهیم :

الف - حاصل ضرب دو عامل به ترتیب آن دو عامل بستگی ندارد .

(شماره ۳۱) .

ب - حاصل ضرب سه عامل تغییر نخواهد کرد غرضاً جای دو عامل

آخر را عوض کنیم .

می خواهیم ثابت کنیم که  $a \times b \times c = a \times c \times b$

چون حاصل  $a \times b$  عبارت است از مجموع  $b$  عدد مساوی با  $a$  پس :

$$a \times b \times c = \underbrace{(a + a + \dots + a)}_{b \text{ مرتبه}} \times c$$

یا نظر به شماره ۳۳ :  $a \times b \times c = \underbrace{ac + ac + \dots + ac}_{b \text{ مرتبه}}$

و چون مجموع  $b$  عدد برابر با  $ac$  مساوی است با  $ac \times b$  :

$$a \times b \times c = a \times c \times b$$

ج - حاصل ضرب چند عامل تغییر نخواهد کرد اگر جای دو عامل آخر را عوض کنیم .

می‌خواهیم ثابت کنیم که :

$$P = a \times b \times c \times d \times e = a \times b \times c \times e \times d$$

در واقع  $P$  عبارت است از حاصل ضرب سه عامل :

$$P = (abc) \times d \times e \quad \text{نظر به تبصره شماره ۳۹ و نظر به حالت قبلی داریم}$$

$$P = (abc) \times e \times d \quad \text{بنابراین :}$$

$$a \times b \times c \times d \times e = a \times b \times c \times e \times d$$

د - حاصل ضرب چند عامل تغییر نخواهد کرد اگر جای دو عامل متوالی را تغییر دهیم .

می‌خواهیم ثابت کنیم که مثلاً :

$$a \times b \times c \times d \times e = a \times b \times d \times c \times e$$

در واقع نظر به حالت قبل داریم :

$$a \times b \times c \times d = a \times b \times d \times c$$

و چون دوطرف این تساوی را در عدد  $e$  ضرب کنیم حاصل می‌شود:

$$a \times b \times c \times d \times e = a \times b \times d \times c \times e$$

ه - نظر به آنچه گذشت می‌توانیم در حاصل ضرب چند عامل ،

هر عامل را يك مرتبه جلوتر یا عقب‌تر بنویسیم . حال اگر این عمل را چند بار متوالی تکرار کنیم بدون تغییر دادن حاصل ضرب می‌توانیم عاملها را به ترتیب دلخواهی جابجا کنیم . مثلاً می‌توان چنین نوشت :

$$abcd = acbd = cabd = cadb$$

و قضیه ثابت است .

۴۱- فرع - می‌توانیم در حاصل ضرب چند عامل ، به جای بعض عوامل ، حاصل ضرب آنها را قرار دهیم .

مثلاً در حاصل ضرب  $abcde$  می‌توان به جای عاملهای  $c$  و  $e$

حاصل ضرب آنها را نوشت . در واقع نظر به قضیه قبل داریم :

$$a \times b \times c \times d \times e = c \times e \times a \times b \times d$$

و نظر به تبصره شماره ۳۹ می‌توان به جای  $c \times e$  حاصل ضرب آنها

را قرار داد . پس :

$$a \times b \times c \times d \times e = (ce) \times a \times b \times d = a \times b \times (ce) \times d$$

نتیجه ۱ - برای ضرب کردن عددی در حاصل ضرب چند عامل ، کافی است که آن را در یکی از عوامل ضرب کرده نتیجه را در عاملهای دیگر ضرب کنیم .

مثلاً به جای آنکه عددی را در ۶ ضرب کنیم می‌توانیم ابتدا آن را

در ۳ ضرب کرده حاصل را در ۲ ضرب نماییم ، زیرا  $۶ = ۲ \times ۳$  .

نتیجه ۲ - برای ضرب کردن حاصل ضرب چند عامل ، در حاصل ضرب چند عامل دیگر کافی است که جمیع آن عوامل را در یکدیگر ضرب کنیم .

$$(abc)(de) = abcde \quad \text{یعنی داریم :}$$

## ۵ - قوای اعداد

۴۲- تعریف - قوه  $m$ ام هر عدد مانند  $a$  عبارت است از حاصل

ضرب  $m$  عامل مساوی با  $a$  . قوه  $m$ ام عدد  $a$  را با علامت  $a^m$  نمایش

می‌دهند و تلفظ می‌کنند  $a$  به قوه  $m$  .

$$a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_m$$

در این مقام  $a$  را پایه و  $m$  را نماینده یا بطور خلاصه نما می خوانند. قوای دوم و سوم هر عدد را بترتیب مجذور (مربع) و مکعب آن عدد می نامند. گاهی به جای آنکه بگویند  $a^m$  را حساب می کنیم، می گویند  $a$  را به قوه  $m$  می رسانیم.

بنا به تعریف، قوه اول هر عدد مساوی است با خود آن عدد.

$$a^1 = a$$

۴۳- حاصل ضرب قوای يك عدد - قضیه - حاصل ضرب چند قوه يك عدد قوه ای است از همان عدد که نماینده اش مجموع نماینده های قوای مزبور باشد.

در واقع  $a^m$  عبارت است از حاصل ضرب  $m$  عامل مساوی با  $a$ . و همچنین  $a^n$  مساوی است با حاصل ضرب  $n$  عامل مساوی با  $a$ . پس  $a^m \times a^n$  مساوی است با حاصل ضرب  $m+n$  عامل مساوی با  $a$  و داریم:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$4^3 \times 4^2 \times 4 = 4^{3+2+1} = 4^6 \quad \text{مثال:}$$

۴۴- قضیه - برای آنکه قوه ای از يك عدد را به قوه جدیدی برسانیم کافی است که نماینده آن را در نماینده جدید ضرب کنیم.

در واقع مثلاً داریم:  $(a^4)^3 = a^4 \times a^4 \times a^4 = a^{4+4+4} = a^{12}$

$$(a^m)^p = a^{m \times p}$$

و بطور کلی:

$$(a^m)^p = (a^p)^m \quad \text{می توان نوشت: (چرا؟)}$$

$$(3^4)^5 = (3^5)^4 = 3^{20} \quad \text{مثال:}$$

۴۵- قوای يك حاصل ضرب - قضیه - قوه  $m$  حاصل ضرب چند عامل مساوی است با حاصل ضرب قوای  $m$  از آن

در واقع داریم:  $(abc)^m = \underbrace{(abc)(abc) \dots (abc)}_{m \text{ مرتبه}}$

$$= a \times a \times \dots \times a \times b \times b \times \dots \times b \times c \times c \times \dots \times c \\ = a^m \times b^m \times c^m$$

مثال: داریم:  $12 = 2^2 \times 3$ ، پس  $12^4 = (2^2)^4 \times 3^4 = 2^8 \times 3^4$

تمرین - در اثبات قضیه فوق کدام قضیه ها را بکار برده ایم؟

#### ۴۶- مربع مجموع یا تفاضل دو عدد

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= (a-b)(a-b) \\ &= (a-b)a - (a-b)b \\ &= a^2 - ab - (ab - b^2) \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= (a+b)a + (a+b)b \\ &= a^2 + ab + (ab + b^2) \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$* (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

وا از آنجا:

مربع تفاضل دو عدد مساوی است با مجموع مربعات آن دو عدد منهای دو برابر حاصل ضرب آنها.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

و از آنجا:

مربع مجموع دو عدد مساوی است با مجموع مربعات آن دو عدد بعلاوه دو برابر حاصل ضرب آنها.

#### ۶- عمل ضرب

۴۷- مسئله - دو عدد مفروضند. می خواهیم حاصل ضرب آنها را بدست آوریم.

جدول ضرب را دانسته فرض کرده چند حالت زیر را تمیز می دهیم:

الف - یکی از دو عدد  $10^n$  است - مثلاً فرض می کنیم که می-

\* اگر  $2ab$  از  $a^2$  بزرگتر باشد ابتدا  $b^2$  را با  $a^2$  جمع کرده سپس از حاصل آنها  $2ab$  را کم می کنیم.

خواهیم حاصل ضرب  $۱۰۰ \times ۳۲$  را حساب کنیم . می دانیم که ضرب عدد  $۱۰۰$  در  $۳۲$  یعنی بدست آوردن مجموع  $۳۲$  سده . پس داریم :  $۳۲ \times ۱۰۰ = ۳۲۰۰$  و نظر به قضیه ۳۱ داریم :  $۳۲ \times ۱۰۰ = ۳۲۰۰$  پس قاعده کلی زیر برای این حالت بدست می آید :

وقتی که یکی از دو عامل ضرب  $۱۰^n$  باشد ، برای پیدا کردن حاصل ضرب کافی است که  $n$  صفر در سمت راست عامل دیگر قرار دهیم . عدد حاصل همان حاصل ضرب مطلوب است .

ب - یکی از دو عامل يك رقمی است - نظر به قضیه ۳۱ همواره می توان این عامل يك رقمی را مضروب فیه قرار داد. مثلاً فرض می کنیم که می خواهیم حاصل ضرب  $P = ۳۴۲ \times ۷$  را حساب کنیم . می توان نوشت :

$$\begin{aligned} P &= (۳ \times ۱۰۰ + ۴ \times ۱۰ + ۲) \times ۷ \\ &= ۳ \times ۷ \times ۱۰۰ + ۴ \times ۷ \times ۱۰ + ۲ \times ۷ \\ &= ۲۱ \times ۱۰۰ + ۲۸ \times ۱۰ + ۱۴ \\ &= ۲۱۰۰ + ۲۸۰ + ۱۴ = ۲۳۹۴ \end{aligned}$$

و از آنجا قاعده زیر برای این حالت بدست می آید :

برای آنکه عدد دلخواهی را در يك عدد يك رقمی ضرب کنیم از سمت راست مضروب شروع کرده متوالیاً هر يك از ارقام آن را در مضروب فیه (يك رقمی) ضرب می کنیم و رقم یکان هر حاصل ضرب را می نویسیم و در صورتی که دهگان داشته باشد شماره دهگان آن را به حاصل ضرب بعدی اضافه می کنیم .

$$\begin{array}{r} ۳۴۲ \times \\ ۷ \\ \hline ۲۳۹۴ \end{array}$$

ج - هر دو عامل عدد دلخواه هستند - مثلاً فرض می کنیم که می خواهیم  $P = ۹۷۲۳ \times ۵۱۶$  را حساب کنیم . می توان نوشت :

$$\begin{aligned} P &= ۹۷۲۳ \times (۵ \times ۱۰۰ + ۱ \times ۱۰ + ۶) \\ &= (۹۷۲۳ \times ۵) \times ۱۰۰ + (۹۷۲۳ \times ۱۰) + (۹۷۲۳ \times ۶) \\ &= ۴۸۶۱۵ \times ۱۰۰ + ۹۷۲۳ \times ۱۰ + ۵۸۳۳۸ \end{aligned}$$

مسئله به حالت های قبل رجوع می شود .

|          |         |         |                 |
|----------|---------|---------|-----------------|
|          | ۹۷۲۳    | ۹۷۲۳    |                 |
|          | ۵۱۶     | ۵۱۶     | در عمل          |
|          |         |         | از گذاشتن صفرها |
| ضرب در ۶ | ۵۸۳۳۸   | ۵۸۳۳۸   |                 |
| « « ۱۰   | ۹۷۲۳۰   | ۹۷۲۳    |                 |
| « « ۵۰۰  | ۴۸۶۱۵۰۰ | ۴۸۶۱۵   |                 |
|          | ۵۰۱۷۰۶۸ | ۵۰۱۷۰۶۸ |                 |

در عمل از گذاشتن صفرهای سمت راست حاصل ضرب های جزئی صرف نظر کرده هر يك از حاصل ضرب های جزئی متوالی را يك مرتبه عقب تر می نویسند .

تمرین - اگر داخل مضروب صفر وجود داشته باشد چه می کنند؟ (چرا؟) از آنچه گذشت قاعده کلی زیر بدست می آید :

۴۸- قاعده عمل ضرب - برای ضرب يك عدد چند رقمی در يك عدد چند رقمی دیگر مضروب فیه را زیر مضروب نوشته \* خطی افقی

\* مطابق قضیه ۳۱ می توان یکی از دو عامل را با اختیار مضروب و دیگری را مضروب فیه نامید .

زیر آنها می کشیم، سپس مضروب را در رقم یکان مضروب فیه ضرب کرده حاصل را زیر خط افقی می نویسیم. بعد مضروب را در رقم دهگان مضروب فیه ضرب کرده، با توجه به اینکه اولین رقم سمت راست این حاصل ضرب از مرتبه دهگان است، آن را زیر حاصل ضرب جزئی اول می نویسیم و عمل را به همین ترتیب ادامه می دهیم تا آنکه مضروب در تمام ارقام مضروب فیه ضرب شود. سپس خط افقی دیگری زیر آخرین حاصل ضرب جزئی کشیده این حاصل ضربها را با هم جمع می کنیم تا حاصل ضرب مطلوب بدست آید.

اگر داخل مضروب فیه يك یا چند صفر وجود داشت از آنها صرف نظر کرده مضروب را در رقمهای بعدی مضروب فیه ضرب می کنیم و در موقع نوشتن، مرتبه آنها را مراعات می کنیم.

**تمرین -** اگر در سمت راست عاملهای ضرب يك یا چند صفر وجود داشته باشد چه باید کرد؟

**۴۹- عدد ارقام يك عدد** - قوه  $m$  عدد  $10^m$  چنین بدست می آید که رقم يك را می نویسیم و جلو آن  $m$  صفر قرار می دهیم؛ مثلاً  $10^4 = 10000$  و  $10^m$  کوچکترین عدد  $m+1$  رقمی است. مثلاً کوچکترین عدد  $3$  رقمی  $10^2 = 100$  است.

پس برای آنکه عددی مانند  $A$  دارای  $n$  رقم باشد لازم و کافی است که آن عدد از  $10^{n-1}$  بزرگتر یا لااقل با آن مساوی بوده از  $10^n$  کوچکتر باشد، یعنی داشته باشیم:  $10^{n-1} \leq A < 10^n$ .

**تمرین -** تحقیق کنید که اگر عدد  $A$  دارای  $p$  رقم و عدد  $B$  دارای  $q$  رقم باشد،  $A \times B$  یا دارای  $p+q$  رقم یا دارای  $p+q-1$  رقم خواهد بود.

## مسائل

- ۱- در موقع ضرب عدد ۲۴۳ در عدد ۴۰۵، صفر عدد ۴۰۵، (مضروب) را در نظر نگرفته ایم. بدون انجام عمل ضرب اشتباه را تعیین کنید.  
(جواب:  $243 \times 360$ )
- ۲- هر يك از دو عامل ضرب  $a \times b$  را به اندازه  $n$  واحد زیاد می کنیم تعیین کنید در حاصل چه تغییری روی می دهد؟
- ۳- تفاضل دو عدد مساوی ۵ است و چون به هر يك از آنها ۷ واحد بیفزاییم حاصل ضرب آنها به اندازه ۳۶۴ واحد زیاد می شود. مطلوب است آن دو عدد.  
(جواب: ۲۵ و ۲۵)
- ۴- حاصل ضرب يك عدد سه رقمی در ۷ از سمت راست به عدد ۶۳۸ ختم شده است. مطلوب است آن عدد.  
(جواب: ۲۳۴)
- ۵- با سه رقم می توان ۶ عدد سه رقمی تشکیل داد. ثابت کنید که مجموع این شش عدد مساوی است با ۲۲۲ برابر مجموع سه رقم مزبور.
- ۶- مطلوب است تعیین سه عدد صحیح بطوری که مضاعف یکی از آنها مساوی مجموع دو عدد دیگر باشد و مجموع هر سه عدد مساوی با حاصل ضرب آنها شود.  
راهنمایی - اگر اولین عدد را  $a$  بگیریم، مجموع سه عدد ۳ا خواهد شد.  
(جواب: ۱ و ۲ و ۳)
- ۷- ثابت کنید که هرگاه عدد  $N = 12345679$  را در یکی از مضرب اولیه عدد ۹ ضرب کنیم عددی بدست می آید که ارقام آن مساوی هستند.
- ۸- در صورتی که رقم یکان دو عدد ۵ باشد، به چه شرطی حاصل ضرب آن دو عدد به ۲۵ ختم می شود؟ حالتی را نیز که دو عدد متساوی باشند مطالعه کنید.  
(جواب: لازم و کافی است که مجموع ارقام دهگان دو عدد زوج باشد)
- ۹- سه رقم سمت راست مضروب ۳۱۷ و سه رقم سمت راست حاصل ضرب ۳۷۲ است. مطلوب است تعیین سه رقم سمت راست مضروب فیه.  
(جواب: ۹۱۶)
- ۱۰- مطلوب است تعیین تفاضل بین مربع مجموع و مربع تفاضل دو عدد.  
(جواب:  $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ )

مورد استعمال ۱ - مطلوب است تعیین دو عدد که مجموعشان ۵۸ و حاصل ضربشان ۵۸۵ باشد (در این مسئله استخراج جذر دانسته فرض شده است) (جواب : ۴۵ و ۱۳)

مورد استعمال ۲ - ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد که مجموعشان مقدار ثابتی است وقتی بزرگترین مقدار ممکن را داراست که آن دو عدد متساوی باشند. ۱۱ - مطلوب است تعیین شرط لازم و کافی برای آنکه حاصل ضرب دو عدد که رقم یکانشان ۶ می باشد به ۳۶ ختم شود.

راهنمایی - این دو عدد را به صورت  $10a + 6$  و  $10b + 6$  بنویسید. (جواب : لازم و کافی است که مجموع ارقام دهگان دو عدد به صفر یا ۵ ختم شود).

۱۲ - ثابت کنید که اگر بر حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی عدد وسطی را بیفزاییم حاصل مساوی مکعب عدد وسطی است و از اینجا نتیجه بگیریم که حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی هرگز مکعب کامل نیست.

۱۳ - عدد دو رقمی پیدا کنید که مجموع ارقام آن مساوی حاصل ضرب ارقامش باشد. (جواب : ۲۲)

۱۴ - اگر تعداد ارقام مضروب و مضروب فیه معلوم باشد ، تعداد ارقام حاصل ضرب را پیدا کنید.

۱۵ - ثابت کنید که اگر ارقام عوامل ضرب را جز رقم یکان تغییر دهیم ، رقم سمت راست حاصل ضرب تغییر نمی کند.

۱۶ - ثابت کنید که حاصل ضرب دو عدد متوالی نمی تواند با يك رقم فرد و یا ۴ و یا ۸ مختوم باشد .

۱۷ - مطلوب است کوچکترین عددی که وقتی در ۷ ضرب شود ، تمام ارقام حاصل ضرب آن از ۶ تشکیل شود.

۱۸ - عدد چهار رقمی پیدا کنید که چون در ۹ ضرب شود ، حاصل ضرب به ۵۶۶۷ ختم شود .

۱۹ - مجموع اعداد يك جدول ضرب را پیدا کنید .

۲۰ - اگر فرض کنیم :

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

و  $S_1, S_2, S_3$  را محاسبه کنید .

## ۷ - تقسیم

۵۰ - مضربهای يك عدد - حاصل ضرب عدد  $n$  را در هر عدد صحیح دیگر مضرب  $n$  می نامند .

مثلا هر يك از حاصل ضربهای  $4 \times 4, 3 \times 4, 2 \times 4, 1 \times 4$  و ...

را مضرب ۴ می نامند . اگر ملاحظه کنیم که صفر را می توان مضرب هر

عدد دلخواه دانست ( تبصره های ۳ و ۴ شماره ۳۵ ) ، می توانیم مضربهای

عددی مانند  $b$  را به ترتیب مقادیر صعودی مرتب کرده سلسله مضربهای

آن را چنین بنویسیم :

$$0, b \text{ و } 2b \text{ و } \dots \text{ و } qb \text{ و } (q+1)b \text{ و } \dots$$

۵۱ - تقسیم - دو عدد  $a$  و  $b$  را در نظر می گیریم و سلسله مضارب

$b$  را می نویسیم و  $a$  را با مضربهای  $b$  مقایسه می کنیم . دو حالت ممکن

است رخ دهد :

الف - ممکن است  $a$  مساوی با یکی از مضربهای  $b$  باشد ، مثلا

داشته باشیم :

$$a = bq \quad (۱)$$

در این صورت  $q$  تنها عددی است که چون در  $b$  ضرب شود حاصل

$a$  خواهد شد .

ب - ممکن است  $a$  مساوی هیچیک از مضربهای  $b$  نباشد . در این

صورت در سلسله مضربهای  $b$  دو عدد متوالی یافته خواهد شد که یکی از

آنها از  $a$  بزرگتر و دیگری از  $a$  کوچکتر باشد . مثلا فرض می کنیم

$$bq < a < b(q+1) \quad (۲) \quad \text{که :}$$

البته عدد  $q$  که به این طریق ممکن می شود منحصر به فرد است. می توان دو حالت فوق را با هم در نظر گرفت و گفت: هرگاه دو عدد  $a$  و  $b$  مفروض باشند،  $a$  را به  $b$  (فقط یکی) مانند  $q$  می توان چنان یافت که:

$$(۳) \quad [bq \leq a < b(q+1)]$$

واضح است که تفاضل  $a - bq$  که آن را  $r$  می نامیم یا صفر است یا از  $b$  کوچکتر است.

برعکس اگر  $a - bq$  مساوی صفریا کوچکتر از  $b$  باشد می توان از آن روابط ۳ را نتیجه گرفت. بنابر این نامساویهای ۳ معادل با روابط زیرند:

$$(۴) \quad \begin{cases} a = bq + r \\ r < b \end{cases}$$

می توان گفت که  $q$  بزرگترین عددی است که باید  $b$  را در آن ضرب کرد تا حاصل مساوی یا کوچکتر از  $a$  شود. از آنچه گذشت تعریف زیر بدست می آید:

**تعریف ۱-** تقسیم عدد  $a$  بر عدد  $b$  عبارت است از تعیین بزرگترین عددی مانند  $q$  که چون در  $b$  ضرب شود حاصل کوچکتر یا مساوی  $a$  شود. عدد  $a$  را مقسوم و عدد  $b$  را مقسوم علیه و عدد  $q$  را خارج قسمت می نامند.

تفاضل مابین مقسوم و حاصل ضرب خارج قسمت در مقسوم علیه را باقیمانده تقسیم می نامند. باقیمانده از مقسوم علیه کوچکتر است.

تعریف فوق را می توان چنین بیان کرد:

**تعریف ۲-** تقسیم عدد  $a$  بر عدد  $b$  عبارت است از تعیین بزرگترین عددی دفعاتی که عدد  $b$  در عدد  $a$  می گنجد.

**۵۲-** برای تعریف تقسیم می توان روابط ۳ یا روابط ۴ شماره قبل را بکار برد یعنی:

شرط لازم و کافی برای آنکه  $q$  خارج قسمت تقسیم  $a$  بر  $b$  باشد این است که:

$$bq \leq a < b(q+1)$$

شرط لازم و کافی برای آنکه  $q$  خارج قسمت و  $r$  باقیمانده تقسیم  $a$  بر  $b$  باشد این است که:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r < b \end{cases}$$

**۵۳- اثر تغییرات مقسوم بر خارج قسمت - قضیه -** اگر مقسوم علیه ثابت بماند و مقسوم زیاد شود خارج قسمت یا ثابت می ماند یا زیاد می شود.

در واقع اگر  $b$  ثابت بماند سلسله مضربهای  $b$  نیز ثابت می ماند و چون عدد  $a$  زیاد شود این عدد یا در فاصله دو مضرب متوالی  $b$  باقی می ماند یا در فواصل بعدی قرار می گیرد. همین قضیه را می توان چنین بیان کرد:

اگر مقسوم علیه ثابت بماند و مقسوم کم شود خارج قسمت یا ثابت می ماند یا کم می شود.

**۵۴- اثر تغییرات مقسوم علیه بر خارج قسمت - قضیه -** اگر مقسوم ثابت بماند و مقسوم علیه زیاد (یا کم) شود خارج قسمت یا ثابت می ماند یا کم (یا زیاد) می شود.

درواقع با در نظر گرفتن تعریف ۲ از شماره ۵۱ واضح است که اگر  $a$  ثابت بماند و  $b$  زیاد شود، بزرگترین عدۀ دفعاتی که  $b$  در  $a$  می‌گنجد، یا ثابت می‌ماند یا کم می‌شود. مثلاً اگر مقسوم ۲۵ و مقسوم‌علیه ۸ باشد، خارج قسمت ۳ خواهد بود. حال اگر مقسوم علیه کم شده مساوی ۷ شود، باز خارج قسمت ۳ است. ولی اگر مقسوم علیه باز کم شده مساوی ۶ شود، خارج قسمت مساوی ۴ خواهد شد.

#### ۸ - خواص تقسیم

##### الف - تقسیمی که در آن باقیمانده صفر باشد

**۵۵- تعریف -** اگر باقیمانده تقسیم  $a$  بر  $b$  صفر باشد داریم  $a = bq$  در این صورت می‌گویند که:  $a$  بر  $b$  قسمت پذیر یا قابل قسمت است یا  $a$  مضربی است از  $b$  یا  $b$  مقسوم علیه  $a$  است یا عدد  $b$  عدد  $a$  را می‌شمرد\* (عاد می‌کند) و همه این عبارتها يك معنی دارند.

**۵۶- تعریف -** اگر  $a$  بر  $b$  قابل قسمت باشد، یعنی داشته باشیم  $a = bq$  در این صورت  $q$  را خارج قسمت کامل  $a$  بر  $b$  می‌نامند و این خارج قسمت را به یکی از دو صورت زیر می‌نویسند:

$$q = \frac{a}{b} \quad q = a : b$$

پس: خارج قسمت کامل  $a$  بر  $b$ ، عددی است که چون در  $b$  ضرب شود

$a$  بدست آید. اما اگر  $a$  بر  $b$  قابل قسمت نباشد و داشته باشیم  $\begin{cases} a = bq + r \\ r < b \end{cases}$

\* اصطلاح می‌شمرد را به جای عاد می‌کنند از کتاب التفهیم گرفته‌ایم.

در این صورت  $q$  را خارج قسمت تقریبی  $a$  بر  $b$  (تقریب نقصانی تا يك واحد) می‌نامند. (این موضوع را بعداً در شماره ۱۳۸ شرح خواهیم داد).

**۵۷- قضیه -** اگر چند عدد بر عددی مانند  $d$  قابل قسمت باشند، مجموع آنها نیز بر  $d$  قابل قسمت است و خارج قسمت تقسیم مجموع بر  $d$  مساوی است با مجموع خارج قسمتهای آن اعداد بر  $d$ .

**برهان -** اگر اعداد  $a$ ،  $b$  و  $c$  بر عدد  $d$  قابل قسمت باشند، داریم:

$$a = a'd \quad b = b'd \quad c = c'd$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$a + b + c = a'd + b'd + c'd = d(a' + b' + c')$$

وقضیه ثابت است.

**۵۸- قضیه -** اگر دو عدد بر عددی مانند  $d$  قابل قسمت باشند تفاضل آنها نیز بر  $d$  قابل قسمت است و خارج قسمت تفاضل بر  $d$  مساوی است با تفاضل خارج قسمتهای آن اعداد بر  $d$ .

زیرا اگر داشته باشیم:  $a = a'd$  و  $b = b'd$  ( $a > b$ )

$$a - b = a'd - b'd = d(a' - b')$$

خواهیم داشت:

**تبصره ۱ -** اگر  $a$  بر  $d$  قابل قسمت باشد، داریم  $a = dq$  و

چون طرفین این تساوی را در عدد  $m$  ضرب کنیم حاصل می‌شود:

$$am = mdq = mqd$$

بنابراین  $am$  بر  $d$  قابل قسمت است و می‌توان گفت:

اگر عددی بر  $d$  قابل قسمت باشد، مضربهای آن عدد نیز بر  $d$  قابل قسمت هستند.

تبصره ۲- می توان نوشت :  $a^n = a \times a^{n-1}$  پس اگر  $a$  بر  $d$  قابل قسمت باشد تمام قوای  $a$  نیز بر  $d$  قابل قسمت هستند .

۵۹- تقسیم حاصل ضرب چند عدد بر یکی از آن اعداد .

الف - می دانیم که می توان نوشت :  $abcd = b \cdot acd$

از این تساوی برمی آید که خارج قسمت کامل  $abcd$  بر عدد  $b$  مساوی است با  $acd$  پس :

اگر بخواهیم حاصل ضرب چند عامل را بر یکی از همان عوامل تقسیم کنیم، کافی است که آن عامل را از حاصل ضرب حذف کنیم تا خارج قسمت کامل بدست آید .

ب - اگر در حاصل ضرب  $abcd$  داشته باشیم  $b = qb'$

می توان نوشت :  $abcd = aqb'cd = ab'cd \cdot q$

واز اینجا معلوم می شود که  $abcd$  بر  $q$  قابل قسمت است و خارج قسمت کامل  $abcd$  بر  $q$  مساوی است با  $ab'cd$  پس :

در يك حاصل ضرب اگر یکی از عوامل بر عددی مانند  $q$  قابل قسمت باشد، آن حاصل ضرب بر  $q$  قابل قسمت است و خارج قسمت آن بر  $q$  چنین بدست می آید که در حاصل ضرب به جای آن عامل خارج قسمت آن را بر  $q$  قرار دهیم .

۶۰- تقسیم يك عدد بر حاصل ضرب چند عدد دیگر - فرض

می کنیم که عدد  $N$  بر حاصل ضرب  $abc$  قابل قسمت باشد . می خواهیم خارج قسمت را تعیین کنیم . چون  $N$  بر  $abc$  قابل قسمت است :

$$N = abc \cdot q = a \cdot bcq$$

از این تساوی برمی آید که خارج قسمت کامل عدد  $N$  بر  $a$  مساوی

است با  $bcq$  . اما خارج قسمت کامل  $bcq$  بر  $b$  مساوی است با  $cq$  (شماره

۵۹ الف) و بالاخره خارج قسمت کامل  $cq$  بر  $c$  عبارت است از  $q$  . پس اگر عدد  $N$  بر  $abc$  قابل قسمت باشد، برای بدست آوردن خارج قسمت، می توان  $N$  را بر  $a$  قسمت کرد و خارج قسمت حاصل را بر  $b$  و خارج قسمت اخیر را بر  $c$  تقسیم کرد . حاصل اخیر خارج قسمت مطلوب است .  
تمرین - خارج قسمت ۱۵۰ را بر حاصل ضرب  $2 \times 3 \times 5$  پیدا کنید .

۶۱- خارج قسمت دو قوه از يك عدد - فرض کنیم  $a^p$  را

می خواهیم بر  $a^q$  قسمت کنیم ( $p > q$ ) نظر به شماره ۴۳ :

$$a^q \times a^{p-q} = a^p$$

پس  $a^p : a^q = a^{p-q}$  و از آنجا قضیه زیر نتیجه می شود :

قضیه - خارج قسمت کامل دو قوه از يك عدد قوه ای است از همان عدد که نماینده اش تفاضل بین نماینده مقسوم و نماینده مقسوم علیه باشد .

$$\text{مثال : } 5^6 : 5^3 = 5^3$$

تبصره ۵- می دانیم که اگر  $a^p$  را بر  $a^p$  (دو عدد مساوی) تقسیم

کنیم، خارج قسمت ۱ است و از روی قاعده شماره قبل خارج قسمت کامل این دو عدد عبارت است از  $a^{p-p}$  یعنی  $a^0$  ، بنابراین علامت  $a^0$  را که بخودی خود فاقد معنی است بنا بر قرارداد مساوی ۱ می خوانیم یعنی  $a$

$$a^0 = 1$$

هر چه باشد می نویسیم :

ب - تقسیم که باقیمانده داشته باشد

تبصره درباره تساوی و نامساوی - اگر داشته باشیم  $a < b$  و

اگر  $a$  و  $b$  هر دو بر عدد  $d$  قابل قسمت باشند، داریم:

$$a = d\alpha \quad b = d\beta$$

و از آنجا  $d\alpha < d\beta$ ، از روی این نامساوی با برهان خلف می توان

بآسانی نتیجه گرفت که  $\alpha < \beta$ ، پس:

اگر طرفین نامساوی بريك عدد قابل قسمت باشند، از تقسیم آنها بر آن عدد باز يك نامساوی در همان جهت بدست می آید.

۶۲- ضرب مقسوم و مقسوم علیه در يك عدد - اگر خارج

قسمت تقسیم  $a$  بر  $b$  مساوی  $q$  و باقیمانده آن  $r$  باشد داریم:

$$a = bq + r \quad (۱) \quad \text{و} \quad r < b \quad (۲)$$

حال اگر عدد دلخواه  $m$  را در نظر گرفته دو طرف تساوی ۱ و دو

طرف نامساوی ۲ را در  $m$  ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$am = bq + rm \quad (۳) \quad \text{و} \quad rm < bm \quad (۴)$$

از روی دو رابطه اخیر دیده می شود که  $q$  خارج قسمت و  $rm$

باقیمانده تقسیم  $am$  بر  $bm$  است. پس می گوئیم:

قضیه - اگر مقسوم و مقسوم علیه يك تقسیم را در يك عدد ضرب کنیم، خارج قسمت تغییر نمی کند و باقیمانده در همان عدد ضرب می شود.

در حالت خاصی که  $a$  بر  $b$  قابل قسمت باشد، اگر  $a$  و  $b$  را در

يك عدد ضرب کنیم، خارج قسمت آنها تغییر نمی کند.

۶۳- قضیه - اگر مقسوم و مقسوم علیه يك تقسیم بر يك عدد قابل

قسمت باشند، اولاً باقیمانده آن تقسیم نیز بر آن عدد قابل قسمت است، ثانیاً اگر مقسوم و مقسوم علیه را بر آن عدد تقسیم کنیم، خارج قسمت تغییر نمی کند

و باقیمانده به همان عدد تقسیم می شود.

برهان - فرض کنیم که  $q$  خارج قسمت و  $r$  باقیمانده تقسیم  $a$  بر

$b$  باشد.

$$a = bq + r \quad (۱) \quad \text{و} \quad r < b \quad (۲)$$

و نیز فرض کنیم که  $a$  و  $b$  بر عدد  $d$  قابل قسمت باشند. اولاً گوییم که چون

$b$  بر  $d$  قابل قسمت است،  $bq$  نیز بر  $d$  قابل قسمت است (تبصره ۱ شماره

۵۸) و چون  $a$  و  $bq$  هر دو بر  $d$  قابل قسمتند، تفاضل آنها یعنی

$r = a - bq$  نیز بر  $d$  قابل قسمت است. ثانیاً چون خارج قسمت کامل

$a$ ،  $b$  و  $r$  را بر  $d$  بترتیب با  $a'$ ،  $b'$  و  $r'$  نمایش داده طرفین تساوی

(۱) و نامساوی (۲) را بر  $d$  تقسیم کنیم، حاصل می شود:

$$a' = b'q + r' \quad \text{و} \quad r' < b'$$

از این روابط معلوم می شود که اگر  $a'$  را بر  $b'$  تقسیم کنیم،

خارج قسمت  $q$  و باقیمانده  $r'$  خواهد بود.

تمرین - ثابت کنید که اگر باقیمانده و مقسوم علیه يك تقسیم بريك عدد

قابل قسمت باشند، مقسوم نیز بر آن عدد قابل قسمت است.

## ۹- تقسیم يك عدد بر حاصل ضرب چند عدد

۶۴- قضیه - برای بدست آوردن خارج قسمت تقسیم يك عدد بر

حاصل ضرب چند عامل می توان آن عدد را به يکی از عوامل ضرب تقسیم کرد و خارج قسمت حاصل را بريكی دیگر از عوامل تقسیم نمود و عمل را به همین ترتیب ادامه داد. آخرین خارج قسمت همان خارج قسمت مطلوب است

(این قضیه در صورتی مورد دارد که عدد مفروض از حاصل ضرب مزبور بزرگتر باشد).

**برهان** - حالتی را که در آن عدد  $N$  بر حاصل ضرب  $abc$  قابل قسمت باشد در شماره ۶۵ مطالعه کردیم اکنون همان طریقه را در حالتی که تقسیمها دارای باقیمانده باشند مطالعه می کنیم :

ابتدا  $N$  را بر  $a$  تقسیم می کنیم و خارج قسمت را  $q_1$  و باقیمانده را  $r_1$  می نامیم. داریم :  $N = aq_1 + r_1$  (۱) و  $r_1 < a$  (۲)  
حال  $q_1$  را بر  $b$  قسمت می کنیم و خارج قسمت را  $q_2$  و باقیمانده را  $r_2$  می نامیم :

$$q_1 = bq_2 + r_2 \quad (۳) \quad \text{و} \quad r_2 < b \quad (۴)$$

بالاخره  $q_2$  را بر  $c$  تقسیم می کنیم و خارج قسمت را  $q_3$  و باقیمانده را  $r_3$  می نامیم :

$$q_2 = cq_3 + r_3 \quad (۵) \quad \text{و} \quad r_3 < c \quad (۶)$$

حال چون مقدار  $q_2$  را از رابطه (۵) در رابطه (۳) قرار دهیم حاصل می شود :  $q_1 = bcq_3 + br_3 + r_1$  و چون این مقدار  $q_1$  را در رابطه (۱) منظور کنیم ، خواهیم داشت :

$$N = abcq_3 + \underbrace{abr_3 + ar_1 + r_1}_R$$

و چون فرض کنیم :  $abr_3 + ar_1 + r_1 = R$  ، داریم :  $N = abcq_3 + R$   
از روی این تساوی خارج قسمت  $N$  بر  $abc$  مساوی است با  $q_3$  ، به شرط

آنکه ثابت کنیم که :

$$R < abc$$

برای آنکه این نامساوی را ثابت کنیم ، ملاحظه می کنیم ، ۱۰۰ در نامساویهای (۲) و (۴) و (۶) همه اعداد صحیح هستند ، اختلاف ما ، طرفین هر نامساوی لا اقل مساوی يك واحد است . پس می توان این نامساویها را چنین نوشت :  $r_1 < a - 1$  و  $r_2 < b - 1$  و  $r_3 < c - 1$   
و از آنجا حاصل می شود :  $R < ab(c - 1) + a(b - 1) + (a - 1)$   
یا :  $R < abc - 1$   
و با ملاحظه آنکه در این نامساوی جمیع اعداد صحیح هستند ، داریم :  $R < abc$  و قضیه ثابت است .

### ۱۰ - تقسیمات متوالی

**۶۵ - تعریف** - مقصود از تقسیم متوالی عدد  $N$  بر اعداد  $a, b, c$  و ... این است که ابتدا  $N$  را بر  $a$  تقسیم کنیم و خارج قسمت را بر  $b$  و خارج قسمت را بر  $c$  و ... تقسیم کنیم.

با در نظر گرفتن این تعریف ، نتیجه زیر از قضیه ۶۴ بدست می آید :  
**نتیجه** - اگر عدد  $N$  را به چند عدد تقسیم کنیم ، آخرین خارج - قسمت بستگی به ترتیب توالی این تقسیمات ندارد .

در واقع آخرین خارج قسمت را می توان به وسیله تقسیم کردن  $N$  بر حاصل ضرب اعداد مفروض بدست آورد .

**مثال** - اگر ۱۰۰ را متوالیاً بر ۲ ، ۳ و ۴ تقسیم کنیم ، آخرین خارج قسمت مساوی است با خارج قسمت ۱۰۰ بر  $2 \times 3 \times 4 = 24$   
یعنی ۴ .

$$۵۷۳۹۲ = ۵۷۳۰۰ + ۹۲$$

یا :  $۹۲ = ۵۷۳ \times ۱۰۰ + ۹۲$  و داریم :  $۹۲ < ۱۰۰$

بنابراین خارج قسمت مطلوب ۵۷۳ و باقیمانده ۹۲ است .

**قاعده -** خارج قسمت تقسیم هر عدد بر  $۱۰^n$  با حذف  $n$  رقم از سمت راست آن عدد بدست می آید و عددی که از  $n$  رقم حذف شده تشکیل می شود باقیمانده تقسیم است .

**۶۹- حالت دوم -** خارج قسمت يك رقمی است - مثلاً فرض

کنیم که می خواهیم عدد ۴۷۸۵۲ را بر عدد ۹۸۳۷ تقسیم کنیم . خارج- قسمت يك رقمی است زیرا اگر يك صفر جلو مقسوم علیه بگذاریم از مقسوم بزرگتر می شود (شماره ۶۷) . دیدیم که اگر مقسوم علیه کم شود و مقسوم ثابت بماند ، خارج قسمت ثابت می ماند یا زیاد می شود (شماره ۵۴) ، پس خارج قسمت تقسیم ۴۷۸۵۲ بر ۹۰۰۰ یا همان خارج قسمت مطلوب یا کمی از آن بزرگتر است .

$$۴۷۸۵۲ : ۹۰۰۰ = ۴۷۸۵۲ : (۹ \times ۱۰۰۰) \quad *$$

و طبق قضیه شماره ۶۴ داریم :

$$۴۷۸۵۲ : (۹ \times ۱۰۰۰) = (۴۷۸۵۲ : ۱۰۰۰) : ۹ = ۴۷ : ۹ = ۵$$

حال امتحان می کنیم که بینیم ۵ خارج قسمت مطلوب است یا بزرگتر از آن است ( باید حاصل ضرب خارج قسمت در مقسوم علیه کوچکتر از مقسوم یا مساوی با آن باشد ) .

\* در این مبحث برای سهولت ، خارج قسمت کامل و همچنین خارج- قسمت تقریبی عدد  $a$  را بر عدد  $b$  با علامت  $b : a$  نشان می دهیم .

## ۱۱- عمل تقسیم

**۶۶-** از تعریف تقسیم بر می آید که اگر  $a < b$  ، خارج قسمت  $a$  بر  $b$  مساوی صفر و باقیمانده این تقسیم  $a$  است . و اگر  $a = b$  ، خارج- قسمت مساوی با ۱ و باقیمانده صفر است . پس در آنچه خواهد آمد همواره فرض می کنیم که مقسوم بزرگتر از مقسوم علیه باشد .

**۶۷- عدد ارقام خارج قسمت - قضیه -** عدد ارقام خارج قسمت مساوی است با کمترین عدد صفرهایی که باید در جلوی مقسوم علیه بگذاریم تا عدد حاصل از مقسوم بزرگتر شود .

**برهان -** فرض کنیم که  $q$  خارج قسمت  $a$  بر عدد ۴۵ باشد ، و نیز فرض کنیم که کمترین عدد صفرهایی که باید در جلو ۴۵ بگذاریم تا عدد حاصل از  $a$  بزرگتر شود ۳ باشد . در این صورت داریم :  $۴۵۰۰۰ < a < ۴۵۰۰۰$  ، از اینجا معلوم می شود که عدد ۴۵ لااقل صدبار در  $a$  می گنجد ولی هزار بار نمی گنجد و ناچار  $q$  از ۱۰۰ بزرگتر یا لااقل مساوی با آن است ولی از ۱۰۰۰ کوچکتر است ، یعنی داریم :  $۱۰۰ \leq q < ۱۰۰۰$  و در هر حال  $q$  دارای سه رقم است (شماره ۴۹) .

**۶۸- مسئله -** دو عدد  $a$  و  $b$  مفروض است می خواهیم خارج قسمت و باقیمانده تقسیم عدد  $a$  را بر عدد  $b$  معین کنیم .

(حالتی را که در آن خارج قسمت و مقسوم علیه يك رقمی هستند دانسته فرض می کنیم) :

**حالت اول- تقسیم بر  $۱۰^n$  -** می خواهیم مثلاً عدد ۵۷۳۹۲ را بر

۱۰۰ تقسیم کنیم ، نظر به تبصره شماره ۱۴ مثال ۲ می توان نوشت :

$$9837 \times 5 = 49185 > \underbrace{47852}_{\text{مق-وم}}$$

پس ۵ از خارج قسمت مطلوب بزرگتر است لذا ۴ را امتحان می کنیم:

$$\text{مقسوم} < 39348 - 9837 \times 4$$

بنابراین ۴ خارج قسمت مطلوب است و باقیمانده تقسیم عبارت است از تفاضل مابین ۴۷۸۵۲ و ۳۹۳۴۸.

**قاعده -** اگر خارج قسمت يك رقمی باشد، از سمت راست مقسوم به عدد ارقام مقسوم علیه یکی کمتر رقم جدا می کنیم و جزء سمت چپ را بر اولین رقم سمت چپ مقسوم علیه تقسیم و خارج قسمت مطلوب را در مقسوم علیه ضرب می کنیم. اگر این حاصل ضرب بزرگتر از مقسوم شد، يك واحد از خارج قسمت می کاهیم و مجدداً امتحان می کنیم و هر وقت حاصل ضرب کوچکتر از مقسوم شد، خارج قسمت را می نویسیم و حاصل ضرب آنرا در مقسوم علیه از مقسوم تفریق می کنیم تا باقیمانده بدست آید.

$$\begin{array}{r} 9837 \\ 47852 \\ \hline 4 \\ 1804 \end{array}$$

**۷۵- حالت کلی -** این حالت متکی به قضیه زیر است:

**قضیه -** عدد دهگان خارج قسمت مساوی است با خارج قسمت تقسیم عدد دهگان مقسوم بر مقسوم علیه.

**برهان -** خارج قسمت تقسیم ۲۷۵۳ را بر ۲۸ عدد  $q$  می نامیم:  
 $28 : 2753 = q$ . حال اگر خارج قسمت  $q$  بر ۱۰ یعنی عدد دهگان مساوی  $\alpha$  باشد داریم:

$$\begin{aligned} 28 : (2753 : 10) &= 10 : \alpha = q \\ 28 : (2753 : 10) &= 28 : (275 : 28) \end{aligned}$$

(شماره ۶۵)

(شماره ۶۸)

پس عدد دهگان خارج قسمت ( $\alpha$  یعنی) مساوی است با خارج قسمت عدد دهگان مقسوم (یعنی ۲۷۵) بر مقسوم علیه (یعنی ۲۸).

**تبصره -** عیناً به همین طریق می توان ثابت کرد که:

عدد صدگان و هزارگان و... خارج قسمت مساوی است با خارج قسمت تقسیم شماره صدگان و هزارگان و... مقسوم بر مقسوم علیه.

**۷۱- تعیین رقم یکان خارج قسمت -** فرض کنیم که می خواهیم عدد ۳۸۷۶ را بر ۷۴ تقسیم کنیم. خارج قسمت عددی است دو رقمی (زیرا  $3876 > 7400$ ) که رقم دهگان آن عبارت است از خارج قسمت تقسیم ۳۸۷ (دهگان مقسوم) بر ۷۴ یعنی ۵؛ اگر رقم یکان خارج قسمت مطلوب را  $u$  بنامیم، این خارج قسمت مساوی است با:

$$\begin{aligned} 5 \times 10 + u & \text{ یعنی } 50 + u \text{ و باید داشته باشیم:} \\ (1) \quad 3876 &= 74(50 + u) + r \\ (2) \quad r &< 74 \end{aligned}$$

اما رابطه (۱) را می توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} 3876 &= (74 \times 50) + 74 \times u + r \\ 3876 - (74 \times 50) &= 74 \times u + r \quad \text{یا} \\ 176 &= 74 \times u + r \quad \text{یا} \end{aligned}$$

و چون داریم  $r < 74$ ، معلوم می شود که  $u$  عبارت است از خارج قسمت تقسیم ۱۷۶ بر ۷۴ پس می توان گفت:

برای بدست آوردن رقم یکان خارج قسمت، باید ابتدا شماره دهگان خارج قسمت را در مقسوم علیه ضرب کرده و ده برابر عدد حاصل را از مقسوم تفریق و سپس باقیمانده این تفریق را بر مقسوم علیه تقسیم کرد. خارج قسمت این تقسیم رقم یکان مطلوب است.

نتیجه - خارج قسمت عدد ۵۲۶۳۷ را بر ۹۶ عدد  $q$  می‌نامیم .

$$52637 : 96 = q$$

نظر به قضیه شماره ۶۷ ، این خارج قسمت يك عدد سه رقمی است .  
حال چون عدد دهگان  $q$  را  $q_1$  و عدد دهگان  $q_1$  یعنی عدد سدگان  $q$  را  $q_2$  بنامیم ، بنا به فرض  $q_2$  عددی است يك رقمی و نظر به تبصره شماره ۷۰ ، عبارت است از خارج قسمت ۵۲۶ (عدد سدگان مقسوم) بر ۹۶ که با آسانی بدست می‌آوریم  $q_2 = 5$  . حال ۵ دهه یعنی ۵۰ را در ۹۶ ضرب و حاصل را از ۵۲۶۳ (دهگان مقسوم) کم می‌کنیم . عدد ۴۶۳ حاصل می‌شود (در عمل ۵ را در ۹۶ ضرب و حاصل را از ۵۲۶ کم می‌کنیم و رقم ۳ را در سمت راست حاصل می‌نویسیم) . نظر به آنچه در شماره ۷۱ ذکر شد ، رقم یکان عدد  $q_1$  عبارت است از خارج قسمت ۴۶۳ بر ۹۶ که آن را با آسانی تعیین می‌کنیم . حاصل می‌شود ۴ ، پس  $q_1 = 54$  و ۵۴ عبارت است از عدد دهگان  $q$  .

حال طبق شماره ۷۱ باید ۹۶ را در ۵۴ دهه یعنی ۵۲۰ ضرب و حاصل را از ۵۲۶۳۷ کم کنیم و نتیجه را به ۹۶ تقسیم کنیم تا رقم یکان بدست آید . این رقم ۸ و خارج قسمت مطلوب عبارت است از  $q = 548$

$$\begin{array}{r|l} 52637 & 96 \\ 463 & 548 \\ \hline 797 & \\ 29 & \end{array}$$

تبصره - در موقع محاسبه می‌توان عمل را آسانتر از این انجام داد . در واقع  $96 \times 40 + 96 \times 500 = 96 \times 540$  و باید این را از ۵۲۶۳۷ کم کنیم . اما قبلا  $96 \times 50$  را از ۵۲۶۳ کم کردیم و حاصل مساوی ۴۶۳ شد . از این رو واضح است که اگر  $96 \times 500$  را از ۵۲۶۳۰ کم کنیم ، حاصل ۴۶۳۰ می‌شود . پس به جای آنکه  $96 \times 540$  را از ۵۲۶۳۷ کم کنیم ، کافی است که  $96 \times 40$  را از ۴۶۳۷ تفریق کنیم ، و نیز به جای این کافی است که  $96 \times 4$  را از ۴۶۳ کم کنیم و رقم ۷ را سمت راست حاصل بنویسیم . از آنچه گذشت قاعده زیر بدست می‌آید :

**قاعده تقسیم در حالت کلی** - از سمت چپ مقسوم کوچکترین عددی که بزرگتر از مقسوم علیه باشد جدا و آن را ، که اولین مقسوم جزء می‌نامیم ، مانند حالت دوم بر مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم و در سمت راست اولین باقیمانده ، يك رقم دیگر از مقسوم فرود می‌آوریم و دومین مقسوم جزء را تشکیل می‌دهیم ، و سپس آن را بر مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را در سمت راست خارج قسمت سابق می‌نویسیم و يك رقم دیگر در سمت راست باقیمانده جزء فرود می‌آوریم و سومین مقسوم جزء را تشکیل می‌دهیم و به همین ترتیب عمل را ادامه می‌دهیم تا وقتی که جمیع ارقام مقسوم بکار روند .

هرگاه یکی از مقسومهای جزء کوچکتر از مقسوم علیه باشد ، رقم خارج قسمت نظیر آن صفر است ، پس يك صفر در خارج قسمت می‌نویسیم و رقم بعدی را فرود می‌آوریم .

۷۲- امتحان عمل تقسیم - برای امتحان صحت عمل تقسیم می توان خارج قسمت را در مقسوم علیه ضرب و باقیمانده جمع کرد . باید حاصل مساوی با مقسوم باشد (بعدها طریقه سه لتری برای امتحان عمل تقسیم خواهیم دید) .

### مسائل

- ۱- در يك عمل تقسیم ، مقسوم علیه ۵۷ و باقیمانده ۱۸ است . چقدر باید به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت يك واحد زیاد و باقیمانده مساوی ۴۳ شود .  
(جواب : ۸۲)
- ۲ - تعیین کنید که در خارج قسمت يك تقسیم چه تغییری پیدا خواهد شد اگر : اولاً مقسوم علیه را به مقسوم بیفزاییم . ثانیاً مقسوم علیه را از مقسوم کم کنیم . ثالثاً ۳ برابر مقسوم علیه را به مقسوم اضافه کنیم .
- ۳ - ثابت کنید که اگر به مقسوم عددی که از تفاضل مقسوم علیه و باقیمانده کمتر باشد بیفزاییم ، خارج قسمت تغییر نخواهد کرد .
- ۴ - اگر عددی را به ۱۱۳ تقسیم کنیم ، باقیمانده ۱۱ می شود ، و اگر همان عدد را به ۱۵۸ تقسیم کنیم باقیمانده ۳۱ می شود . در صورتی که می دانیم در هر دو تقسیم خارج قسمت یکی است ، مطلوب است تعیین خارج قسمت و مقسوم .

(جواب : مقسوم = ۴۶۳ خارج قسمت = ۴)

- ۵ - در يك تقسیم ، مقسوم علیه ۳۷ و باقیمانده ۱۲ است ، اگر به مقسوم ۱۷۹ واحد اضافه کنیم ، چه تغییری در خارج قسمت و باقیمانده پیدا خواهد شد ؟

(جواب : ۵ واحد به خارج قسمت اضافه و باقیمانده مساوی ۶ می شود)  
۶- در يك عمل تقسیم ، مقسوم علیه ۳۶ و باقیمانده ۱۵ است . می خواهیم چنان عددی به مقسوم اضافه کنیم که خارج قسمت يك واحد زیاد شود ، تعیین کنید که این عدد در چه حدودی می تواند تغییر کند .

(جواب : مابین ۲۱ و ۵۶)

- ۷ - دو عدد را بر یکدیگر تقسیم کرده ایم . خارج قسمت ۳۰ و

باقیمانده ۶۴ شده است . اگر ۱۷۹ واحد به مقسوم بیفزاییم و مقسوم علیه را تغییر ندهیم ، خارج قسمت ۳۱ و باقیمانده صفر می شود . مطلوب است تعیین مقسوم و مقسوم علیه .

(جواب : مقسوم = ۷۳۵۴ مقسوم علیه = ۲۴۳)

- ۸- پس از انجام يك عمل تقسیم ، يك واحد از مقسوم علیه کم و عمل را تکرار می کنیم . در چه صورت خارج قسمتهای دو تقسیم مساوی خواهند بود ؟

[جواب : (۱ + باقیمانده) - مقسوم علیه < خارج قسمت]

- ۹ - در يك تقسیم ، مقسوم ۱۰۹۸۷ و باقیمانده ۲۵ است . معین کنید که مقسوم علیه و خارج قسمت چه مقادیری می توانند اختیار کنند .

- ۱۰ - ثابت کنید که در هر تقسیم ، مقسوم بزرگتر است از دو برابر باقیمانده (به شرط آنکه خارج قسمت مخالف صفر باشد) .

- ۱۱ - در يك تقسیم اگر ۱۴ واحد به مقسوم ۲ واحد به مقسوم علیه بیفزاییم ، خارج قسمت تغییر نمی کند و باقیمانده ۳ واحد زیاد می شود . مطلوب است تعیین خارج قسمت .

### مسائل مختلف راجع به چهار عمل اصلی

- ۱۲ - مطلوب است تعیین سه عدد که مجموع آنها ۷۰ باشد ، در صورتی که اگر اولی را بر دومی تقسیم کنیم خارج قسمت ۲ و باقیمانده يك ، و اگر سومی را بر دومی تقسیم کنیم خارج قسمت و باقیمانده هر دو ۳ شود .
- ۱۳ - در يك تقسیم ، مقسوم ۸۰۲ و خارج قسمت ۱۴ است . معلوم کنید که مقسوم علیه و باقیمانده چه مقدار می توانند باشند .

- ۱۴ - مطلوب است تعیین عددی که چون آن را در ۹۴ ضرب کنیم ، ۵۹۰۵۵ بر آن افزوده شود .

- ۱۵ - مطلوب است تعیین اعدادی که اگر هر يك از آنها را بر ۳۷ تقسیم کنیم ، باقیمانده مساوی خارج قسمت شود .

(جواب :  $k \times 38$  به شرط آنکه  $k < 37$  باشد)

- ۱۶ - خارج قسمت تقسیم يك عدد بر عدد دیگر مساوی ۱۱ و باقیمانده این تقسیم ۳۹ است . مطلوب است تعیین مقسوم و مقسوم علیه ، در صورتی که می دانیم مقسوم از ۵۰۰ کوچکتر است .

جواب : اگر مقسوم را  $D$  و مقسوم علیه را  $d$  بنامیم جوابهای زیر را خواهیم داشت :  $(D=479 \text{ و } d=40)$  و  $(D=490 \text{ و } d=41)$

۱۷ - در يك تقسیم ، باقیمانده صفر و مجموع مقسوم و مقسوم علیه و خارج قسمت مساوی ۴۹ است ، و مجموع مقسوم و مقسوم علیه مساوی است با مجموع خارج قسمت و ۴۱ . مطلوب است تعیین مقسوم و مقسوم علیه و خارج قسمت .

(جواب : ۳۶ = مقسوم ، ۹ = مقسوم علیه ، ۴ = خارج قسمت)

۱۸ - يك عدد را جداگانه به دو عدد صحیح متوالی تقسیم می کنیم . ثابت کنید که برای آنکه خارج قسمت در هر دو تقسیم یکی باشد ، لازم و کافی است که این خارج قسمت کوچکتر یا حداکثر مساوی با باقیمانده تقسیم اول باشد .

۱۹ - عددی ۳ برابر عدد دیگر است . اگر به هر يك از این دو عدد ۴ واحد اضافه کنیم ، به حاصل ضرب آنها ۲۲۴ واحد اضافه می شود . مطلوب است تعیین این دو عدد . (جواب : ۱۳ و ۲۹)

۲۰ - عددی را بر عدد دیگر تقسیم کرده ایم ، خارج قسمت ۳۵۶ و باقیمانده ۴۶۲۳ شده است . تعیین کنید حداکثر چند واحد می توانیم در عین حال به مقسوم و مقسوم علیه اضافه کنیم بدون آنکه خارج قسمت تغییر کند . (جواب : ۱۳)

راهنمایی - هر دفعه که يك واحد به مقسوم و مقسوم علیه اضافه کنیم باقیمانده از يك طرف به اندازه خارج قسمت کم می شود و از طرف دیگر يك واحد زیاد می شود .

۲۱ - در يك تقسیم ، مقسوم ۵۲۹۵۶۵ است . مطلوب است تعیین مقسوم علیه و خارج قسمت بنابر آنکه می دانیم در تقسیمات جزئی برای تعیین خارج قسمت ، باقیمانده ها بترتیب ۲۴۶ و ۲۲۲ و ۵۴۲ می باشند (در این مسئله تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترك چند عدد دانسته فرض شده است) .

۲۲ - ثابت کنید که حاصل ضرب  $4n$  عدد صحیح متوالی مضربی است از  $۲۳n$  .

۲۳ - مطلوب است تعیین تمام اعدادی که چون آنها را در ۳۷ ضرب و حاصل ضرب را بر ۳۱ تقسیم کنیم ، باقیمانده تقسیم ۱۵ شود .

۲۴ - مطلوب است تعیین تمام اعدادی که چون عدد ۴۳۲۷۵ را بر آنها تقسیم کنیم ، خارج قسمت تقریبی تا يك واحد مضرب صحیح ۱۰۰ شود .

۲۵ - اگر دو عدد را بر تفاضلشان تقسیم کنیم ، باقیمانده ها و خارج-قسمتها را با هم مقایسه کنید .

۲۶ - ثابت کنید اگر مضربی از مقسوم علیه را به مقسوم اضافه کنیم باقیمانده تغییر نمی کند .

۲۷ - جوابهای صحیح معادله زیر را پیدا کنید :

$$ab = 5a + b + 1$$

۲۸ - نقاطی از منحنی تابع  $y = \frac{7x-37}{x-6}$  پیدا کنید که مختصات آنها صحیح و مثبت باشد .

۲۹ - عدد دو رقمی پیدا کنید که برابر مجموع مربع رقم یکان و مکعب رقم دهگان خود باشد .

## دستگاههای شمار

**۷۳-** دیدیم که دستگاه شمار معمولی، دستگاه اعشاری است که در آن عدد ۱۰ اهمیت خاصی دارد و نیز دیدیم که در این دستگاه واحد هر مرتبه ۱۰ برابر واحد مرتبه پایین تر از آن است. عدد ۱۰ را **مبنای** این دستگاه می نامند.

می توان مبنای دستگاه شمار را عدد دلخواهی مانند  $A$  اختیار کرد. در این صورت واحد مرتبه دوم مساوی  $A$  برابر واحد مرتبه اول یعنی  $A$  واحد است و واحد مرتبه سوم مساوی  $A$  برابر واحد مرتبه دوم یا  $A^2$  واحد است و همچنین واحد مرتبه چهارم مساوی با  $A$  برابر واحد مرتبه سوم یا  $A^3$  واحد است و غیره. پس می توان گفت:

**تعریف -** مبنای يك دستگاه شمار، عددی است که معین می کند که واحد هر مرتبه چند برابر واحد مرتبه قبل است.

برای نوشتن يك عدد در دستگاهی که مبنای آن  $B$  است،  $B$  رقم بکار می رود که بترتیب نمایش اعداد زیرند:

صفر يك دو سه ...  $B-2$   $B-1$

اگر مبنای دستگاه ۱۰، یا از ۱۰ کوچکتر باشد، عدهای از ارقام معمولی برای نوشتن اعداد در آن دستگاه کافی هستند، ولی اگر مبنای

دستگاه از ۱۰ بزرگتر باشد، باید ارقام دیگر نیز بکار برد، مثلاً در دستگاهی که مبنایش ۱۲ است ارقام زیر بکار می روند:

$\beta$   $\alpha$  ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰

که  $\alpha$  نماینده عدد ۱۰ و  $\beta$  نماینده عدد ۱۱ است.

**مثال ۱-** دستگاهی که مبنای آن ۲ است - در این دستگاه فقط

ارقام ۰ و ۱ بکار می روند و اعداد چنین نوشته می شوند:

صفر (۰) يك (۱) دو (۱۰) سه (۱۱)

چهار (۱۰۰) پنج (۱۰۱) شش (۱۱۰) هفت (۱۱۱) و غیره.

عیب این دستگاه این است که در آن برای نوشتن يك عدد كوچك عده زیادی رقم بکار می رود.

**مثال ۲-** دستگاهی که مبنای آن ۱۲ است - در این دستگاه

ارقام زیر بکار می رود:

$\beta$   $\alpha$  ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰

۱۱ ۱۰

و اعداد از ۱۲ به بالا در این دستگاه چنین نوشته می شوند:

دوازده (۱۰) سیزده (۱۱) چهارده (۱۲)

پانزده (۱۳) شانزده (۱۴) بیست و يك (۱۹)

بیست و دو (۱۵) بیست و سه (۱۶) بیست و چهار (۲۰)

**۷۴- مسئله ۱-** عددی در دستگاه به مبنای  $B$  نوشته شده، می خواهیم آن را در دستگاه اعشاری بنویسیم.

**مثال ۱-** در دستگاه به مبنای ۸ عددی چنین نوشته شده ۳۶۵۲،

-۶۲-

می‌خواهیم این عدد را در دستگاه اعشاری بنویسیم. این عدد مرکب است از:

۲ واحد مرتبه اول یعنی ۲ واحد

۵ واحد مرتبه دوم یعنی  $5 \times 8$  واحد

۶ واحد مرتبه سوم یعنی  $6 \times 8^2$  واحد

۳ واحد مرتبه چهارم یعنی  $3 \times 8^3$  واحد

پس این عدد در دستگاه اعشاری برابر است با:

$$1962 = 2 + (5 \times 8) + (6 \times 8^2) + (3 \times 8^3)$$

یعنی این عدد در دستگاه اعشاری چنین نوشته می‌شود: ۱۹۶۲.

**مثال ۲-** در دستگاه به مبنای ۲ عددی چنین نوشته می‌شود:

۱۰۵۱۱۰۵۱؛ می‌خواهیم این عدد را در دستگاه اعشاری بنویسیم. داریم:

$$153 = 1 + 8 + 16 + 128 = 1 + 2^3 + 2^4 + 2^7$$

پس این عدد در دستگاه اعشاری چنین نوشته می‌شود: ۱۵۳.

**۷۵- مسئله ۲-** عددی در دستگاه اعشاری نوشته شده است، می-

خواهیم آن را در دستگاهی که مبنای آن  $\beta$  است بنویسیم.

**مثال -** می‌خواهیم عدد ۱۴۳۲ را در دستگاه به مبنای ۱۲ بنویسیم.

اول ببینیم این عدد شامل چند واحد مرتبه دوم است، یعنی این عدد را

$$1432 = 12 \times 119 + 4$$

پس این عدد شامل ۱۱۹ واحد مرتبه دوم و ۴ واحد مرتبه اول است.

حال ببینیم ۱۱۹ واحد مرتبه دوم شامل چند واحد مرتبه سوم است و برای

$$119 = 12 \times 9 + 11$$

پس ۹ واحد مرتبه سوم و ۱۱ واحد مرتبه دوم (با  $\beta$ ) و چهار واحد

-۶۳-

مرتبه اول در عدد مفروض موجود است. پس این عدد در دستگاه به مبنای ۱۲ چنین نوشته می‌شود:  $9\beta 4$ .

۴- اگر بخواهیم عددی را که در دستگاه به مبنای  $10 \neq B$  نوشته

شده در دستگاهی دیگر به مبنای  $10 \neq B'$  بنویسیم، ابتدا آن را در

دستگاه اعشاری و بعد در دستگاه  $B'$  می‌نویسیم.

### مسائل

۱-  $4966\beta 8$  در دستگاه به مبنای ۱۲ نوشته شده است آن را در

دستگاه اعشاری بنویسید. (جواب:  $1193324$ )

۲- عدد  $122401$  در دستگاه به مبنای ۵ نوشته شده است آن را در

دستگاه اعشاری بنویسید. (جواب:  $4726$ )

۳- عدد  $48152$  در دستگاه اعشاری نوشته شده است آن را در دستگاه

به مبنای ۶ بنویسید. (جواب:  $1010532$ )

۴- عدد  $25$  را که در دستگاه اعشاری نوشته شده است در دستگاه به

مبنای ۲ بنویسید. (جواب:  $11001$ )

۵- عدد  $78632$  در دستگاه به مبنای ۹ نوشته شده است آن را در

دستگاه به مبنای ۱۲ بنویسید. (جواب:  $26302$ )

۶- عدد اعشاری  $58$  در دستگاهی که مبنایش  $B$  می‌باشد چنین نوشته

می‌شود ۷۲. مطلوب است تعیین  $B$ . (جواب: ۸)

۷- عددی در دستگاه به مبنای ۸ چنین نوشته می‌شود  $303$ : در چه

دستگاهی این عدد به صورت  $523$  نوشته خواهد شد؟

۸- این معادله را حل کنید:  $(abc)_7 = (cba)_9$ .

۹- در مبنای  $B$  چند عدد  $n$  رقمی وجود دارد؟

۱۰- ثابت کنید در مبنای  $\alpha$  اعداد  $2(\alpha-1)$  و  $(\alpha-1)^2$  دو عدد

دو رقمی و مقلوب یکدیگرند.

۱۱- دو عدد  $765$  و  $72$  را به مبنای ۶ ببرید و بعد در همان مبنای تفاضل

دو عدد را پیدا کنید. (شهریور ۱۳۴۱ دبیرستانها)

۱۲ - عددی در مبنای ۷ به صورت  $\overline{aa}$  و مجذورش در همان مبنا به صورت  $\overline{bbbb}$  نوشته شده ،  $a$  و  $b$  را پیدا کنید .

۱۳ - عدد سه رقمی در مبنای ۱۵ به صورت  $\overline{aaa}$  و در مبنای ۷ به صورت عدد سه رقمی در آمده است که ارقامش ۳ عدد صحیح متوالی است . عدد را پیدا کنید .

۱۴ - عددی دو رقمی در مبنای  $\overline{ba}$  به صورت  $\overline{ab}$  و در مبنای ۳ به صورت  $\overline{bbbb}$  نوشته شده ، عدد را پیدا کنید .

۱۵ - عددی در مبنای اعشاری به صورت  $\overline{ab}$  و در مبنای  $\overline{ba}$  به صورت ۲۵ نوشته شده ، عدد را پیدا کنید .

۱۶ - عدد  $\overline{abc}$  در مبنای ۱۲ نوشته شده است . همین عدد در مبنای مجهولی به صورت  $\overline{abc0}$  است . این مبنا کدام است ؟

۱۷ - ثابت کنید در هر مبنای شمار ۱۳۳۱ مکعب کامل است .

۱۸ - ثابت کنید عدد ۱۵۱۵۱ در هر مبنایی بر ۱۱۱ همان مبنا قابل

قسمت است .

۱۹ - اگر عددی در مبنای ۲ دارای ۸ رقم باشد ، در مبنای ۱۲ چند رقم دارد ؟

۲۰ - در تقسیم  $(57364)_8$  بر  $(xy)_8$  باقیمانده های جزء ۶۱ و ۱۵ و ۶۵ شده است . مقسوم علیه را پیدا کنید .

۲۱ - اعمال زیر را در مبناهای مربوطه انجام دهید :

$$(1035)_6 + (3504)_6$$

$$(4073)_9 - (3854)_9$$

$$(2100)_5 : (144)_5$$

$$(371)_8 \times (245)_8$$

## فصل چهارم

### قابلیت تقسیم

۱ - باقیمانده تقسیم مجموع یا حاصل ضرب چند عدد بر يك عدد

۷۶ - قضیه - برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم مجموع چند عدد بر عددی مانند  $d$  ، کافی است که هر يك از آن اعداد را بر  $d$  تقسیم کرده باقیمانده ها را با هم جمع کنیم ، و سپس مجموع باقیمانده ها را نیز بر  $d$  تقسیم کنیم . باقیمانده این تقسیم همان باقیمانده مطلوب است .  
برهان - اعداد  $a$  ،  $b$  و  $c$  را در نظر می گیریم و هر يك از آنها

را بر  $d$  تقسیم می کنیم تا حاصل شود :

$$a = dq + r \quad r < d$$

$$b = dq' + r' \quad r' < d$$

$$c = dq'' + r'' \quad r'' < d$$

چون تساویها را با هم عضو بعضو جمع کنیم داریم :

$$(۱) \quad a + b + c = d(q + q' + q'') + r + r' + r''$$

حال اگر خارج قسمت تقسیم  $r + r' + r''$  بر  $d$  را  $n$  و باقیمانده این

تقسیم را  $R$  فرض کنیم خواهیم داشت :

$$(۲) \quad r + r' + r'' = dn + R \quad (۳) \quad R < d$$

(البته اگر  $r + r' + r''$  از  $d$  کوچکتر باشد  $n$  صفر است) .

۱۲ - عددی در مبنای ۷ به صورت  $\overline{aa}$  و مجذورش در همان مبنا به صورت  $\overline{bbbb}$  نوشته شده ،  $a$  و  $b$  را پیدا کنید .

۱۳ - عدد سه رقمی در مبنای ۱۵ به صورت  $\overline{aaa}$  و در مبنای ۷ به صورت عدد سه رقمی در آمده است که ارقامش ۳ عدد صحیح متوالی است . عدد را پیدا کنید .

۱۴ - عددی دو رقمی در مبنای  $\overline{ba}$  به صورت  $\overline{ab}$  و در مبنای ۳ به صورت  $\overline{bbbb}$  نوشته شده ، عدد را پیدا کنید .

۱۵ - عددی در مبنای اعشاری به صورت  $\overline{ab}$  و در مبنای  $\overline{ba}$  به صورت ۲۵ نوشته شده ، عدد را پیدا کنید .

۱۶ - عدد  $\overline{abc}$  در مبنای ۱۲ نوشته شده است . همین عدد در مبنای مجهولی به صورت  $\overline{abc0}$  است . این مبنا کدام است ؟

۱۷ - ثابت کنید در هر مبنای شمار ۱۳۳۱ مکعب کامل است .

۱۸ - ثابت کنید عدد ۱۰۱۰۱ در هر مبنایی بر ۱۱۱ همان مبنا قابل

قسمت است .

۱۹ - اگر عددی در مبنای ۲ دارای ۸ رقم باشد ، در مبنای ۱۲ چند رقم دارد ؟

۲۰ - در تقسیم  $(57364)_8$  بر  $(xy)_8$  باقیمانده های جزء ۶۱ و ۱۵ و ۶۵ شده است . مقسوم علیه را پیدا کنید .

۲۱ - اعمال زیر را در مبناهای مربوطه انجام دهید :

$$(1035)_6 + (3504)_6$$

$$(4073)_9 - (3854)_9$$

$$(2100)_5 : (144)_5$$

$$(371)_8 \times (245)_8$$

## فصل چهارم

### قابلیت تقسیم

۱ - باقیمانده تقسیم مجموع یا حاصل ضرب چند عدد بر يك عدد

۷۶ - قضیه - برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم مجموع چند عدد بر عددی مانند  $d$  ، کافی است که هر يك از آن اعداد را بر  $d$  تقسیم کرده باقیمانده ها را با هم جمع کنیم ، و سپس مجموع باقیمانده ها را نیز بر  $d$  تقسیم کنیم . باقیمانده این تقسیم همان باقیمانده مطلوب است .  
برهان - اعداد  $a$  ،  $b$  و  $c$  را در نظر می گیریم و هر يك از آنها

را بر  $d$  تقسیم می کنیم تا حاصل شود :

$$a = dq + r \quad r < d$$

$$b = dq' + r' \quad r' < d$$

$$c = dq'' + r'' \quad r'' < d$$

چون تساویها را با هم عضو بعضو جمع کنیم داریم :

$$(۱) \quad a + b + c = d(q + q' + q'') + r + r' + r''$$

حال اگر خارج قسمت تقسیم  $r + r' + r''$  بر  $d$  را  $n$  و باقیمانده این

تقسیم را  $R$  فرض کنیم خواهیم داشت :

$$(۲) \quad r + r' + r'' = dn + R \quad (۳) \quad R < d$$

(البته اگر  $r + r' + r''$  از  $d$  کوچکتر باشد  $n$  صفر است) .

بنابر این تساوی ۱ را می توان چنین نوشت :

$$(۴) \quad a+b+c=d(q+q'+q''+n)+R$$

حال از روی تساوی ۴ و نامساوی ۳ بر می آید که باقیمانده تقسیم

$a+b+c$  بر  $d$  مساوی است با  $R$  و قضیه ثابت است .

**۷۷ - قضیه -** برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم حاصل ضرب چند

عدد بر عددی مانند  $d$  ، کافی است که هر يك از آن اعداد را بر  $d$  تقسیم و باقیمانده ها را در هم ضرب کنیم و سپس حاصل ضرب باقیمانده ها را بر  $d$  تقسیم کنیم . باقیمانده این تقسیم همان باقیمانده مطلوب است .

**برهان -** برای سهولت بیان ، قضیه را در مورد حاصل ضرب دو

عدد ثابت می کنیم . این استدلال کلی است و در مورد حاصل ضرب چند عدد نیز می توان آن را تکرار کرد . دو عدد  $a$  و  $b$  را در نظر می گیریم و هر يك از آنها را بر  $d$  تقسیم می کنیم تا حاصل شود :

$$a=dq+r \quad r<d \quad \text{و} \quad b=dq'+r' \quad r'<d$$

چون تساویها را عضو بعضو در یکدیگر ضرب کنیم داریم :

$$ab=(dq+r)(dq'+r')=d^2qq'+dqr'+dq'r+rr'$$

$$(۱) \quad ab=d(dqq'+qr'+q'r)+rr' \quad \text{یا}$$

حال اگر خارج قسمت تقسیم  $rr'$  را بر  $d$  مساوی با  $n$  و باقیمانده

این تقسیم را مساوی با  $R$  فرض کنیم ، خواهیم داشت :

$$(۲) \quad R<d \quad \text{و} \quad rr'=dn+R$$

(البته اگر  $rr'$  از  $d$  کوچکتر باشد  $n$  صفر است) .

بنابراین تساوی ۱ را می توان چنین نوشت :

$$(۳) \quad ab=d(dqq'+qr'+q'r+n)+R$$

از روی تساوی ۳ و نامساوی ۲ بر می آید که باقیمانده تقسیم  $ab$

بر  $d$  مساوی است با  $R$  و قضیه ثابت است .

**تبصره -** در حالت خاصی که تمام عوامل ضرب متساوی باشند از

قضیه فوق نتیجه زیر بدست می آید :

اگر باقیمانده تقسیم  $a$  بر عدد  $b$  مساوی با  $r$  باشد ، باقیمانده های

تقسیم  $a^n$  و  $r^n$  بر عدد  $b$  با هم مساوی هستند .

**مثال -** باقیمانده تقسیم ۱۰ بر ۹ مساوی است با ۱ ، پس باقیمانده

$10^n$  بر ۹ مساوی است با باقیمانده تقسیم  $1^n$  بر ۹ یعنی ۱ .

## ۲ - قابلیت تقسیم

**۷۸ -** گاهی ممکن است که بدون انجام دادن عمل تقسیم ، معین

کنیم که مقسوم بر مقسوم علیه قابل قسمت است یا نه و اگر نیست باقیمانده چیست . در قضایای زیر همواره فرض می کنیم که اعداد در دستگاه اعشاری نوشته شده اند .

**۷۹ - قابلیت تقسیم بر ۲ و ۵ - قضیه -** باقیمانده تقسیم هر

عدد بر ۲ یا ۵ مساوی است با باقیمانده تقسیم رقم یکان آن بر ۲ یا ۵ .

**برهان -** اگر رقم یکان عدد  $a$  را  $u$  و شماره \* دهگان آن را

$$d \quad \text{بنامیم می توان نوشت :} \quad a=10d+u$$

$$\text{مثال} \quad (۶۲۵=۱۰ \times ۶۲+۵)$$

و چون  $۱۰=۲ \times ۵$  ،  $۱۰$  و در نتیجه  $10d$  بر ۲ و ۵ قابل قسمت است و

باقیمانده تقسیم  $a$  بر ۲ یا ۵ همان باقیمانده تقسیم  $u$  بر ۲ یا ۵ است

(قضیه ۷۶) .

نتیجه ۱- شرط لازم و کافی برای آنکه عددی بر ۲ قابل قسمت باشد آن است که رقم سمت راست آن صفر یا ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ باشد.

اعدادی را که بر ۲ قابل قسمت هستند زوج می نامند. هر عدد زوج به صورت  $2k$  می باشد (چرا؟) اعدادی را که بر ۲ قابل قسمت نیستند فرد می خوانند. هر عدد فرد به صورت  $(2k+1)$  می باشد (چرا؟)

نتیجه ۲- شرط لازم و کافی برای آنکه عددی بر ۵ قابل قسمت باشد آن است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد.

تبصره - باقیمانده تقسیم عددی که بر ۵ قابل قسمت نباشد یکی از اعداد ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ خواهد بود (چرا؟).

۸۰- قابلیت تقسیم بر ۴ و ۲۵ - قضیه - باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۴ یا ۲۵ مساوی است با باقیمانده تقسیم عددی که از دو رقم سمت راست آن تشکیل می شود بر ۴ یا ۲۵.

برهان - اگر عددی را که از دو رقم سمت راست عدد  $a$  تشکیل می شود  $n$ ، و شماره صدگان عدد  $a$  را  $c$  بنامیم می توان نوشت:

$$a = 100c + n$$

$$(4275 = 100 \times 42 + 75) \quad \text{مثال}$$

و چون  $100 = 4 \times 25$ ،  $100$  و در نتیجه  $100c$  بر ۴ و ۲۵ قابل قسمت است و باقیمانده تقسیم  $a$  بر ۴ یا ۲۵ همان باقیمانده تقسیم  $n$  بر ۴ یا ۲۵ است (قضیه ۷۶).

نتیجه ۱- شرط لازم و کافی برای آنکه عددی بر ۴ قابل قسمت باشد آن است که عددی که از دو رقم سمت راست آن عدد تشکیل می شود بر ۴ قابل قسمت باشد.

اگر رقم یکان عدد  $a$  را  $u$  و رقم دهگان آن را  $d$  بنامیم، می توان

$$n = 10d + u = 8d + 2d + u = 4 \text{ مضرب} + 2d + u \quad \text{نوشت:}$$

از اینجا نتیجه می گیریم که همچنین:

شرط لازم و کافی برای آنکه عددی بر ۴ قابل قسمت باشد آن است که دو برابر رقم دهگان بعلاوه رقم یکان آن بر ۴ قابل قسمت باشد.

نتیجه ۲- شرط لازم و کافی برای آنکه عددی بر ۲۵ قابل قسمت باشد آن است که آن عدد از سمت راست به ۰۰ یا ۲۵ یا ۵۰ یا ۷۵ ختم شود. ۸۲- قابلیت تقسیم بر ۸ و ۱۲۵ - باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۸ یا ۱۲۵ مساوی است با باقیمانده تقسیم عددی که از سه رقم سمت راست آن تشکیل می شود بر ۸ یا ۱۲۵.

برهان - اگر عددی را که از سه رقم سمت راست عدد  $a$  تشکیل می شود  $n$  و شماره هزارگان عدد  $a$  را  $m$  بنامیم می توان نوشت:

$$a = 1000m + n$$

$$(38653 = 1000 \times 38 + 653) \quad \text{مثال}$$

و چون  $1000 = 8 \times 125$ ،  $1000$  و در نتیجه  $1000m$  بر ۸ و ۱۲۵ قابل قسمت است و باقیمانده تقسیم  $a$  بر ۸ یا ۱۲۵ همان باقیمانده تقسیم  $n$  بر ۸ یا ۱۲۵ است (قضیه ۷۶).

نتیجه ۱- شرط لازم و کافی برای آنکه عددی بر ۸ قابل قسمت باشد آن است که عددی که از سه رقم سمت راست آن عدد تشکیل می شود بر ۸ قابل قسمت باشد.

اگر رقم یکان عدد  $a$  را  $u$  و رقم دهگان آن را  $d$  و رقم صدگان آن را  $c$  بنامیم می توان  $n$  یعنی عددی را که از ۳ رقم سمت راست عدد  $a$  تشکیل می شود چنین نوشت:

$$n = 100c + 10d + u$$

و چون :  $100 = 12 \times 8 + 4$

پس :  $n = 12 \times 8c + 4c + 8d + 2d + u$

یا :  $n = 12 \times 8c + 8d + 4c + 2d + u = 8 \text{ مضرب } + 4c + 2d + u$

پس به جای نتیجه فوق می توان گفت :

شرط لازم و کافی برای آنکه عددی بر ۸ قابل قسمت باشد آن است که چهار برابر رقم صدگان بعلاوه دو برابر رقم دهگان بعلاوه رقم یکان آن، بر ۸ قابل قسمت باشد.

### ۸۳- قابلیت تقسیم بر ۹ - قضیه - باقیمانده تقسیم هر عدد بر

۹ مساوی است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن \* بر ۹.

برهان - اولاً چون باقیمانده تقسیم ۱۰ بر ۹ مساوی است با ۱،

باقیمانده  $10^n$  نیز بر ۹ مساوی است با ۱ (تبصره ۷۷). ثانیاً عددی را که از يك رقم با معنی \* و چند صفر (در سمت راست آن) تشکیل می شود در نظر می گیریم، مثل :

$$80000 = 8 \times 10000 = 8 \times 10^4$$

باقیمانده تقسیم این حاصل ضرب بر ۹ مساوی است با حاصل ضرب باقی-

مانده های تقسیم عاملهای آن بر ۹ (قضیه ۷۷)، یعنی  $8 \times 1$ . پس :

باقیمانده تقسیم هر عدد که از يك رقم با معنی و چند صفر (در سمت راست آن) تشکیل شده باشد بر ۹ مساوی است با همان رقم.

ثانیاً عدد دلخواهی مانند ۳۷۹۱ را در نظر می گیریم. می توان

نوشت :  $3791 = 3000 + 700 + 90 + 1$

\* اغلب به جای قدر مطلق رقم همان کلمه رقم را ذکر می کنیم.

\*\* هر يك از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ را رقم

با معنی می نامند و آنها را بدین وسیله از صفر متمایز می کنند.

و باقیمانده تقسیم این مجموع بر ۹ مساوی است با مجموع باقیمانده ها،

جمله آن یعنی  $1 + 9 + 7 + 3$  و این مقدار مساوی است با مجموع

ارقام عدد مفروض، و برای تعیین باقیمانده عدد مفروض بر ۹ باید

باقیمانده تقسیم این مجموع را بر ۹ بدست آوریم و قضیه ثابت است.

نتیجه - شرط لازم و کافی برای آنکه عددی بر ۹ قابل قسمت باشد این است که مجموع ارقام آن بر ۹ قابل قسمت باشد.

واضح است که در موقع محاسبه مجموع ارقام می توان از رقم ۹

صرف نظر کرد.

### ۸۴- قابلیت تقسیم بر ۳ - قضیه - باقیمانده تقسیم هر عدد

بر ۳ مساوی است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن بر ۳.

برای اثبات ملاحظه می کنیم که  $10 = 3 \times 3 + 1$  پس باقیمانده

تقسیم ۱۰ و در نتیجه باقیمانده تقسیم هر يك از قوای ۱۰ بر ۳ مساوی

است با يك و استدلال را مانند استدلال قضیه قبل ادامه می دهیم.

### ۸۵- شرط لازم و کافی برای آنکه عددی بر ۳ قابل قسمت باشد

این است که مجموع ارقام آن بر ۳ قابل قسمت باشد.

### ۸۶- قابلیت تقسیم بر ۱۱ \* - قضیه - برای بدست آوردن

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۱ کافی است که آخرین رقم سمت چپ آن عدد را از

رقم سمت راست و مجاورش کم کنیم (و در صورتی که این تفریق ممکن نباشد ۱۱

واحد به رقم سمت راست بیفزاییم تا ممکن شود) و سپس باقیمانده را از رقم

بعد کم کرده عمل را به همین ترکیب ادامه دهیم (در صورت لزوم ۱۱ واحد

به مفروق منه می افزاییم) باقیمانده آخرین تفریق همان باقیمانده تقسیم عدد

مفروض بر ۱۱ می باشد.

\* این قضیه را به صورتی که در اینجا بیان می کنیم در هیچیک از کتابهای

متعدد و مختلف حساب که در اختیار ما هستند ندیده ایم و تصور می کنیم

تازگی داشته باشد.

(برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم يك عدد بر ۱۱ این طریق عملاً از طریقه‌ای که معمولاً در سایر کتابهای حساب ذکر می‌کنند آسانتر است).

**الف - اثبات قضیه در مورد يك عدد دو رقمی -** عدد دو رقمی  $a$  را در نظر می‌گیریم ورقم یکان آن را  $u$  ورقم دهگان آن را  $d$  می‌نامیم. می‌توان نوشت:

$$a = 10d + u = 11d + u - d = 11 \text{ مضرب} + (u - d)$$

پس باقیمانده تقسیم عدد  $a$  بر ۱۱ مساوی است با  $u - d$  یعنی حاصل تفریق رقم دهگان آن از رقم یکان آن به شرط آنکه  $u > d$  باشد. اگر  $u < d$  باشد، می‌توان با افزودن و کاستن ۱۱ واحد بر عدد  $a$  چنین نوشت:

$$a = 10d + u = 11d + u - d = 11d - 11 + (11 + u) - d = 11 \text{ مضرب} + [(11 + u) - d]$$

پس اگر  $u < d$  باشد، باقیمانده تقسیم  $a$  بر ۱۱ مساوی است با  $(11 + u) - d$  یعنی حاصل تفریق رقم دهگان آن از مجموع رقم یکان آن با ۱۱ و قضیه در این مورد ثابت است.

**مثال ۱-** باقیمانده تقسیم عدد ۷۹ بر ۱۱ مساوی است با:  $9 - 7 = 2$

**مثال ۲-** باقیمانده تقسیم عدد ۶۳ بر ۱۱ مساوی است با:  $3 - 6 = -3$

**مثال ۳-** باقیمانده تقسیم عدد ۵۴ بر ۱۱ مساوی است با:  $4 - 5 = -1$

**ب - اثبات قضیه در مورد هر عدد دلخواه -** برای اثبات قضیه در حالت کلی کافی است ثابت کنیم که:

باقیمانده تقسیم هر عدد چند رقمی بر ۱۱ تغییر نخواهد کرد اگر عددی را که از دو رقم سمت چپ آن تشکیل می‌شود برداریم و به جای آن باقیمانده تقسیم آن را بر ۱۱ بنویسیم:

عدد ۲۴۵۹۱ را در نظر می‌گیریم. می‌توان نوشت:

$$24591 = 24000 + 591 = 24 \times 1000 + 591$$

اما باقیمانده تقسیم ۲۴ بر ۱۱ مساوی است با ۲ و داریم:

$$24 = 2 \times 11 + 2$$

واز آنجا:

$$24591 = (2 \times 11 + 2) \times 1000 + 591 = 2 \times 11 \times 1000 + (2000 + 591) = 11 \text{ مضرب} + 2591$$

و حکم فوق ثابت است زیرا باقیمانده تقسیم ۲۴۵۹۱ بر ۱۱ مساوی است با باقیمانده تقسیم ۲۵۹۱ بر ۱۱ و عدد دوم به این طریق بدست می‌آید که دو رقم سمت چپ عدد ۲۴۵۹۱ یعنی ۲۴ را برداریم و به جای آن باقیمانده تقسیم ۲۴ بر ۱۱ یعنی ۲ را قرار دهیم.

حال چون درباره ۲۵۹۱ همین عمل را انجام دهیم و درباره عدد حاصل آن را تکرار کنیم حکم قضیه در حالت کلی ثابت می‌شود.

**حالت خاص -** ممکن است عددی که دو رقم سمت چپ يك عدد چند رقمی مفروض را تشکیل می‌دهد ۱۰ باشد مانند عدد ۱۰۷ در این صورت اگر ۱۰ را برداریم باید به جای آن باقیمانده تقسیم ۱۰ بر ۱۱ یعنی ۱۰ را قرار دهیم و همان عدد اولی حاصل می‌شود ولی ثابت می‌کنیم که در این مورد نیز قاعده فوق عملی است و کافی است ۱۰ را از حاصل جمع رقم سمت راست آن (یعنی ۷) با ۱۱ کم کنیم تا باقیمانده تقسیم عدد ۱۰۷ بر ۱۱ بدست آید. در واقع می‌توان نوشت:

$$۱۰ = ۱۱ + \text{مضرب } ۱۱ = ۹ \times ۱۱ + ۱ = ۹ \times ۱۱ + (۱۱ - ۱۰) = ۱۱ \times ۱۱ + ۱ - ۱۰ = ۱۰۰$$

پس :

$$۱۰۷ = ۱۱ \times \text{مضرب } ۱۱ + [(۱۱ + ۷) - ۱۰]$$

نتیجه - شرط لازم و کافی برای آنکه عددی بر ۱۱ قابل قسمت باشد این است که اگر آخرین رقم سمت چپ آن را از رقم مجاور و سمت راست خود کم کنیم و باقیمانده را از رقم بعدی کم کنیم و عمل را ادامه دهیم (و هر وقت تفریق ممکن نشد ۱۱ واحد بر مفروق منه بیفزاییم) باقیمانده آخرین تفریق صفر باشد.

مثال - می خواهیم ببینیم عدد ۵۶۰۷۸ بر ۱۱ قابل قسمت است یا نه ؟ می گوئیم ۵ از ۶ مساوی است با ۱ ، ۱ از ۱۱ مساوی است با ۱۰ ، ۱۰ از ۱۸ مساوی است با ۸ ، ۸ از ۰ مساوی است با صفر. پس این عدد بر ۱۱ قابل قسمت است .

۸۷ - قابلیت تقسیم بر ۷ - قضیه - برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۷ کافی است که آخرین رقم سمت چپ عدد را در ۳ ضرب و حاصل را با رقم سمت راست و مجاور آن عدد جمع کنیم و سپس این حاصل را هفت هفت طرح و باقیمانده را در ۳ ضرب کنیم و حاصل را با رقم بعدی جمع کنیم و نتیجه را هفت هفت طرح کرده به همین ترتیب عمل را ادامه دهیم . آخرین باقیمانده همان باقیمانده تقسیم عدد مفروض بر ۷ است.

برای اثبات این قضیه موارد زیر را تشخیص می دهیم :

الف - برهان قضیه در مورد عدد دو رقمی - عدد دو رقمی  $a$  را در نظر می گیریم و رقم یکان آن را  $u$  و رقم دهگان آن را  $d$  می نامیم. می توان نوشت :

$$a = ۱۰d + u = ۷d + ۳d + u = ۷ \times \text{مضرب } ۷ + (۳d + u)$$

پس باقیمانده تقسیم عدد  $a$  بر ۷ مساوی است با باقیمانده تقسیم  $۳d + u$  بر ۷ .

ب - برهان قضیه در مورد هر عدد دلخواه - برای اثبات قضیه در حالت کلی کافی است که ثابت کنیم که : باقیمانده تقسیم هر عدد چند رقمی بر ۷ تغییر نخواهد کرد اگر عددی را که از دو رقم سمت چپ آن تشکیل می شود برداریم و به جای آن باقیمانده تقسیم آن را بر ۷ بنویسیم. عدد ۳۴۵۱۲ را در نظر می گیریم و آن را به صورت زیر می نویسیم :

$$۳۴۵۱۲ = ۳۴۰۰۰ + ۵۱۲ = ۳۴ \times ۱۰۰۰ + ۵۱۲$$

اما باقیمانده تقسیم ۳۴ بر ۷ مساوی است با باقیمانده تقسیم  $۱۳ = ۳ \times ۳ + ۴$  بر ۷ یعنی ۶ ، و می توان نوشت :  $۳۴ = ۷ \times ۴ + ۶$

$$۳۴۵۱۲ = (۷ \times ۴ + ۶) \times ۱۰۰۰ + ۵۱۲$$

$$= ۷ \times ۴ \times ۱۰۰۰ + ۶۰۰۰ + ۵۱۲ = ۷ \times \text{مضرب } ۷ + ۶۵۱۲$$

و حکم فوق ثابت است ، زیرا باقیمانده تقسیم ۳۴۵۱۲ بر ۷ مساوی است با باقیمانده تقسیم ۶۵۱۲ بر ۷ و عدد دوم چنین بدست می آید که دو رقم سمت چپ عدد ۳۴۵۱۲ یعنی ۳۴ را برداریم و به جای آن باقیمانده تقسیم ۳۴ بر ۷ یعنی ۶ را قرار دهیم . حال چون در باره عدد ۶۵۱۲ همین عمل را انجام دهیم و درباره عدد حاصل آن را تکرار کنیم حکم قضیه در حالت کلی ثابت می شود .

نتیجه - شرط لازم و کافی برای آنکه عددی بر ۷ قابل قسمت باشد

این است که اگر آخرین رقم سمت چپ آن را در ۳ ضرب کرده بارقم مجاور و سمت راست آن جمع کنیم و حاصل را هفت هفت طرح کنیم و عمل را به همین طریق ادامه دهیم آخرین باقیمانده صفر باشد .

**مثال :** می خواهیم ببینیم عدد ۳۶۵۳ بر ۷ قابل قسمت است یا نه؟

$$\text{می گوییم} \quad 3 \times 3 = 9 \quad 9 + 6 = 15$$

که چون هفت هفت آن را طرح کنیم باقی می ماند ۱

$$3 \times 1 = 3 \quad 3 + 5 = 8$$

که چون هفت هفت آن را طرح کنیم باقی می ماند ۱

$$3 \times 1 = 3 \quad 3 + 3 = 6$$

پس باقیمانده عدد ۳۶۵۳ بر ۷ مساوی است با ۶ و این عدد بر ۷ قابل قسمت نیست .

**تبصره -** می توان قبل از امتحان قابلیت تقسیم يك عدد بر ۷

ارقام ۷، ۸ و ۹ را در عدد حذف کرده به جای آنها بترتیب ارقام ۵، ۹ و ۲ را قرار داد (چرا؟) .

**مثال :** می خواهیم ببینیم عدد ۹۷۵۴۸ بر ۷ قابل قسمت است

یا نه؟

ابتدا طبق آنچه گذشت ارقام ۹ و ۷ و ۸ را بر می داریم و به جای

آنها بترتیب ارقام ۲ و ۵ و ۱ را قرار می دهیم عدد ۲۵۴۱ بدست

می آید . حال چون این عدد را مطابق قاعده مزبور امتحان کنیم، معلوم

می شود که باقیمانده تقسیم آن بر ۷ مساوی است با ۳ .

**۸۸- امتحان ضرب -** حاصل ضرب  $c = a \times b$  و عدد دلخواهی

مانند  $a$  را در نظر می گیریم . برای یافتن باقیمانده تقسیم  $c$  بر  $a$  کافی است هریک از اعداد  $a$  و  $b$  را بر  $a$  تقسیم و باقیمانده ها را در هم ضرب کنیم و سپس حاصل ضرب باقیمانده ها را نیز بر  $a$  تقسیم کنیم . باقیمانده این تقسیم همان باقیمانده تقسیم  $c$  بر  $a$  است ( شماره ۷۷ ) . پس باقیمانده تقسیم  $c$  را بر  $a$  به دو طریق می توان بدست آورد . یکی مستقیماً و یکی به ترتیب فوق و به این وسیله می توان عمل ضرب را امتحان کرد . اگر نتیجه محاسبه در هر دو بار یکی نبود ، معلوم می شود اشتباهی در عمل رخ داده است و اگر این اشتباه مربوط به محاسبه باقیمانده ها نباشد معلوم می شود در عمل ضرب اشتباه شده است .

ولی اگر نتیجه محاسبه یکی بود نمی توان مطمئن شد که حاصل ضرب کاملاً صحیح است ، زیرا اگر به  $c$  مضربی از  $a$  اشتباهاً اضافه شده باشد نتیجه امتحان ضرب این اشتباه را نشان نخواهد داد . عدد  $a$  را باید چنان انتخاب کرد که بتوان باقیمانده تقسیم هر عدد دلخواه را بر  $a$  باسانی بدست آورد و گذشته از این در موقع محاسبه این باقیمانده باید جميع ارقام عدد دخالت داشته باشند .

اعداد ۹ و ۱۱ و ۷ برای این امتحان مناسب هستند و معمولاً با عدد ۹ امتحان می کنند ولی چنانکه برای قابلیت تقسیم بر ۷ ذکر کردیم این امتحان به وسیله ۷ مطمئن تر است .

**مثال :**  $7382 \times 834 = 6156588$

این ضرب را با ۹ امتحان می کنیم . باقیمانده تقسیم ۷۳۸۲ بر ۹

مساوی است با ۲ و باقیمانده تقسیم ۸۳۴ بر ۹ مساوی است با ۶؛ حاصل ضرب  $2 \times 6$  مساوی است با ۱۲ و باقیمانده تقسیم ۱۲ بر ۹ مساوی است با ۳. حال چون باقیمانده تقسیم حاصل ضرب بر ۹ مساوی است با ۳، نتیجه این امتحان صحت احتمالی عمل ضرب را نشان می‌دهد.

**تمرین -** صحت عمل ضرب فوق را با اعداد ۷ و ۱۱ امتحان کنید.

**۸۹- امتحان تقسیم -** اولاً اگر باقیمانده تقسیم صفر باشد، چون مقسوم مساوی با حاصل ضرب مقسوم علیه در خارج قسمت است، امتحان تقسیم نیز مانند امتحان ضرب عمل می‌شود. ثانیاً اگر تقسیم باقیمانده داشته باشد، ابتدا این باقیمانده را از مقسوم کم می‌کنیم تا مسئله به حالت اول برگردد.

### مسائل

- ۱ - ثابت کنید که حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر ۲ و بر ۳ قابل قسمت است.
- ۲ - ثابت کنید که یکی از هر دو عدد زوج متوالی همیشه بر ۴ قابل قسمت است.
- ۳ - ثابت کنید که مجذور هر عدد فرد مضرب است از ۸ بعلاوه ۱.
- ۴ - مطلوب است تعیین اعدادی که بین ۱۰۰ و ۳۰۰ واقع باشند و باقیمانده تقسیم هر یک از آنها بر ۲۵ مساوی با ۹ باشد.
- ۵ - ثابت کنید که از دو عدد مفروض همواره یکی از آنها یا مجموع آنها یا تفاضل آنها بر ۳ قابل قسمت است.
- ۶ - صحت حاصل ضرب سه عدد را چگونه با امتحان می‌کنند (قاعده)؟
- ۷ - چرا تفاضل هر دو عدد دلخواه که با چهار رقم ۵ و ۷ و ۸ و ۴ به ترتیب دلخواه نوشته شده باشند بر ۹ قابل قسمت است؟

۸ - ثابت کنید که اگر عدد  $a$  بر ۳ قابل قسمت نباشد، مربع آن به این صورت خواهد بود:  $a^2 = 3 \times \text{مضرب} + ۱$

۹ - ثابت کنید که اگر عدد  $a$  بر ۵ قابل قسمت نباشد، مربع آن به این صورت خواهد بود:  $a^2 = 5 \times \text{مضرب} + ۱$

۱۰ - ثابت کنید که حاصل ضرب  $(n+1)(2n+1)(n(n+1))$  همواره بر ۲ و بر ۳ قابل قسمت است.

۱۱ - ثابت کنید که  $n^5 - n$  همواره بر ۲ و ۳ و ۵ قابل قسمت است.

۱۲ - مطلوب است تعیین عددی دو رقمی که اگر آن را بر ۹ تقسیم کنیم، باقیمانده ۴ و اگر آن را بر ۱۱ تقسیم کنیم، باقیمانده ۵ شود. (جواب: ۴۹)

۱۳ - مسئله ۱۲ را درحالتی که باقیمانده‌ها به ترتیب ۸ و ۵ باشند حل کنید. (جواب: ۷۱)

۱۴ - مطلوب است تعیین عددی دو رقمی که مساوی با دو برابر حاصل ضرب ارقامش باشد. (جواب: ۳۶)

۱۵ - مطلوب است تعیین عددی دو رقمی که مساوی با سه برابر حاصل ضرب ارقامش باشد. (جواب: ۱۵ و ۲۴)

۱۶ - مطلوب است تعیین دو عدد که تفاضل مربعاتشان مساوی با ۳۶ باشد. (جواب: ۶ و ۱۰ یا ۸ و ۱۰)

۱۷ - ثابت کنید که اگر اعداد  $a$  و  $b$  مضرب ۳ نباشند، عدد  $a^6 - b^6$  بر ۹ قابل قسمت است.

۱۸ - عددی چهار رقمی تعیین کنید که بر ۹ و ۴ قابل قسمت باشد و رقم هزارگان آن ۵ و رقم دهگان ۷ باشد.

(جواب: ۵۰۷۶ و ۵۴۷۲ و ۵۹۷۶)

۱۹ - ارقام  $x$  و  $y$  را چنان تعیین کنید که  $45yx$  بر ۴ و ۹ قابل قسمت باشد. (جواب:  $(x=7, y=2)$  و  $(x=3, y=6)$  و  $(x=0, y=0)$ )

۲۰ - ارقام  $x$  و  $y$  را چنان تعیین کنید که عدد  $123xy$  بر ۸ و ۹ قابل قسمت باشد. (جواب:  $(x=1, y=2)$  یا  $(x=8, y=4)$ )

۲۱ - ثابت کنید که عدد  $n$  هر چه باشد همیشه  $1 + 4^{2n+1}$  بر ۵ قابل  
قسمت است.

۲۲ - ثابت کنید که اگر عدد  $a+b$  بر ۱۰ مضرب ۷ باشد، عدد  $a^2 - b^2$  نیز مضرب ۷ است.

۲۳ - ثابت کنید که باقیمانده تقسیم عدد  $37^n$  بر ۱۱ همیشه یکی از اعداد ۴ و ۵ و ۹ و ۳ و ۱ است.

۲۴ - ثابت کنید که  $n$  هر چه باشد عدد  $1 + (9n-1)10^n$  مضرب ۹ است.

۲۵ - ثابت کنید که  $n$  هر چه باشد عدد  $1 + 8^{n+2} + 9^{2n+1}$  بر ۷۳ قابل قسمت است.

۲۶ - ثابت کنید که  $n$  هر چه باشد عدد  $1 + 15n + 2^{2n}$  بر ۹ قابل قسمت است.

۲۷ - ثابت کنید که اگر  $2^n - x$  باشد،  $4^x + 2^x + 1$  مضربی است از هفت.

۲۸ - باقیمانده تقسیم  $5472^{128}$  را بر ۷ پیدا کنید.

۲۹ - باقیمانده تقسیم  $1495^{200} + 1037^{100}$  را بر ۱۱ پیدا کنید.

۳۰ - باقیمانده تقسیم  $227^{15} \times 2417^{34}$  را بر ۸ پیدا کنید.

۳۱ - باقیمانده تقسیم  $107^{24}$  را بر ۱۳ تعیین کنید.

(شهریور ۱۳۳۶)

۳۲ -  $x$  و  $y$  را طوری پیدا کنید که عدد  $N = \overline{yx36y5}$  بر ۱۳۷۵ قابل قسمت باشد.

۳۳ -  $a$  را طوری تعیین کنید که عدد  $N = \overline{2a78}$  بر ۱۷ قابل قسمت باشد.

۳۴ - ثابت کنید اگر  $a$  عدد فردی باشد  $a^5 - a$  بر ۲۴۰ قابل قسمت است.

(خرداد ۱۳۳۶)

۳۵ - عددی ۳ رقمی پیدا کنید که برابر با مجموع ۶ عددی باشد، از دو بدوی ارقام آن حاصل می شود.

۳۶ - ثابت کنید معادله  $x^2 + y^2 = 7z^2$  دارای جواب صحیح نیست.

۳۷ - رقم سمت راست عدد  $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$  را پیدا کنید.

۳۸ - ثابت کنید باقیمانده  $a^7$  بر ۷ مساوی است با باقیمانده تقسیم عدد  $a$  بر ۷ و از این رو ثابت کنید که  $5^7 + 4^7 + 3^7 + 2^7$  بر ۷ قابل قسمت است.

۳۹ - اگر دو عدد فرد  $a$  و  $b$  بر ۳ قابل قسمت نباشند ثابت کنید عدد  $a^2 - b^2$  بر ۲۴ قابل قسمت است.

۴۰ - ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه عددی بر ۶ قابل قسمت باشد آن است که مجموع رقم یکان آن عدد با چهار برابر هر يك از ارقام دیگر بر ۶ قابل قسمت باشد.

۴۱ - عدد چهار رقمی پیدا کنید که اگر آن را بر ۴، ۵، ۹، ۱۱ و ۲۵ تقسیم کنیم باقیمانده ها بترتیب ۱، ۴، ۵، ۱ و ۱۴ بشود.

(خرداد ۱۳۳۶)

۴۲ - عدد صحیح  $a$  را چنان پیدا کنید که  $13 + 2a$  بر ۱ -  $a$  قابل قسمت باشد.

۴۳ - از تقسیم يك مجذور کامل بر ۹ چه باقیمانده هایی ممکن است بدست آید؟

۴۴ - به جای  $a$  چه اعداد صحیحی باید قرار داد تا عددهای  $2 - 3a$  مضرب ۵ باشند، دستوری پیدا کنید که عددهای  $a$  از روی آن بدست آید.

(شهریور ۱۳۳۷)

در این صورت، هر يك از مقسوم علیه‌های مشترك اعداد  $a$  و  $b$  عدد  $b$  را می‌شمارد؛ و برعکس هر عدد که  $b$  را بشمارد،  $a$  را می‌شمارد، پس:

اگر  $b$  عدد  $a$  را بشمارد، مقسوم علیه‌های مشترك  $a$  و  $b$  عبارتند از مقسوم علیه‌های  $b$ . در این صورت بزرگترین مقسوم علیه مشترك  $a$  و  $b$  خود  $b$  است.

ثانیاً -  $a$  بر  $b$  قابل قسمت نیست و باقیمانده تقسیم آن  $r$  است، و

$$a = bq + r \quad \text{و یا} \quad r = a - bq$$

یادآوری می‌کنیم که هر عدد که  $b$  را بشمارد،  $bq$  را نیز می‌شمارد. اگر عددی  $a$  و  $b$  را بشمارد،  $r = a - bq$  را نیز می‌شمارد؛ و اگر عددی  $b$  و  $r$  را بشمارد،  $a = bq + r$  را نیز می‌شمارد، پس می‌توان گفت:

اگر باقیمانده تقسیم  $a$  بر  $b$  مساوی  $r \neq 0$  باشد، مقسوم علیه‌های مشترك  $(a$  و  $b)$  عبارتند از مقسوم علیه‌های مشترك  $(r$  و  $b)$ .

پس برای تعیین مقسوم علیه‌های مشترك  $a$  و  $b$  کافی است که مقسوم علیه‌های مشترك  $b$  و  $r$  را که بترتیب از  $a$  و  $b$  کوچکترند معین کنیم. بنابراین  $b$  را بر  $r$  تقسیم می‌کنیم و اگر این تقسیم باقی‌مانده‌ای مانند  $r_1$  داشت  $r$  را بر  $r_1$  تقسیم می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم.

سلسله اعداد  $a, b, r, r_1, \dots$  نزولی است و پس از عدد

محدودی عمل تقسیم به‌صفر ختم می‌شود.

## بزرگترین مقسوم علیه مشترك

و

## کوچکترین مضرب مشترك

### ۱ - بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو یا چند عدد

۹۰- تعریف - هرگاه اعداد مفروض  $a, b, c, \dots$  بر عددی مانند  $D$  قابل قسمت باشند،  $D$  را مقسوم علیه مشترك اعداد  $a, b, c, \dots$  می‌نامند و هر يك از اعداد  $a, b, c, \dots$  را مضرب  $D$  می‌گویند. هر يك از مقسوم علیه‌های مشترك اعداد  $a, b, c, \dots$  و ... از کوچکترین این اعداد کوچکتر یا حداکثر با آن مساوی است. پس عدد مقسوم علیه‌های مشترك چند عدد محدود است و میان این مقسوم علیه‌ها یکی از همه بزرگتر است که آن را بزرگترین مقسوم علیه مشترك اعداد  $a, b, c, \dots$  می‌نامند. واضح است که عدد ۱ مقسوم علیه مشترك جمیع اعداد است.

مثال: مقسوم علیه‌های مشترك اعداد ۲۴ و ۱۶ عبارتند از: ۱، ۲، ۴، ۸ و بزرگترین آنها ۸ است.

### ۹۱ - مقسوم علیه‌های مشترك دو عدد $a$ و $b$ ( $a > b$ ) -

عدد  $a$  را بر  $b$  تقسیم می‌کنیم. دو حالت ممکن است رخ دهد.

اولاً -  $a$  بر  $b$  قابل قسمت است (یعنی  $b$  عدد  $a$  را می‌شمارد) و

$$a = bq$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = bq + r & r < b \\ b = rq_1 + r_1 & r_1 < r \\ r = r_1 q_2 + r_2 & r_2 < r_1 \\ \dots & \dots \\ r_{n-1} = r_n q_{n+1} & r_{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

مقسوم‌علیه‌های مشترك (a و b) عبارتند از مقسوم‌علیه‌های مشترك (r و b) یا (r و r) یا ... یا (r<sub>n-1</sub> و r<sub>n</sub>)، و بنابر این عبارتند از مقسوم‌علیه‌های r<sub>n</sub> (آخرین مقسوم‌علیه).

در این حالت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b عبارت است از r<sub>n</sub>.

از آنچه گذشت صحت قضیه زیر در هر دو حالت روشن می‌شود:

۹۳ - قضیه - اگر D بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك اعداد a و b باشد، مقسوم‌علیه‌های مشترك a و b عبارتند از مقسوم‌علیه‌های D.

از استدلال فوق قاعده زیر برای محاسبه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد بدست می‌آید.

قاعده - برای بدست آوردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد ابتدا عدد بزرگتر را بر عدد کوچکتر تقسیم می‌کنیم. اگر باقیمانده این تقسیم صفر شد، عدد کوچکتر خود بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد است، و در غیر این صورت عدد کوچکتر را بر باقیمانده مزبور تقسیم می‌کنیم؛ اگر باقیمانده این تقسیم صفر شد، مقسوم‌علیه همین تقسیم (باقیمانده تقسیم قبل) بزرگترین مقسوم‌علیه مطلوب است و گرنه عمل را به ترتیب فوق ادامه می‌دهیم و مقسوم‌علیه هر تقسیم را بر باقیمانده همان تقسیم قسمت می‌کنیم تا باقیمانده یکی از تقسیمات صفر شود. در این صورت مقسوم‌علیه همان تقسیم بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد مفروض است.

این قاعده را قاعده تقسیمات متوالی می‌نامند.

مثال - محاسبه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك اعداد ۸۵ و ۴۸

طرز عملی محاسبه:

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| ۱  | ۱  | ۲  |    |
| ۸۵ | ۴۸ | ۳۲ | ۱۶ |
| ۳۲ | ۱۶ | ۰  |    |

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك اعداد ۸۵ و ۴۸ عدد ۱۶ است.

۹۴ - تعریف - اگر دو عدد مقسوم‌علیه مشتركی جز يك نداشته باشند آن دو عدد را نسبت به هم اول یا متباین می‌نامند.

مثلا اعداد ۸ و ۱۵ نسبت به هم اولند.

۹۴ - تعیین مقسوم‌علیه‌های مشترك چند عدد - قضیه - در تعیین مقسوم‌علیه‌های مشترك چند عدد می‌توان به جای دو عدد از اعداد مزبور بزرگترین مقسوم‌علیه مشتركشان را قرار داد.

برهان - اعداد a، b، c و d را در نظر می‌گیریم و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b را u می‌نامیم و دوسلسله اعداد زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{cccc} (۱) & d & c & \underbrace{b \quad a} \\ (۲) & d & c & u \end{array}$$

هر مقسوم‌علیه مشترك سلسله ۱ مقسوم‌علیه مشترك سلسله ۲ است (شماره ۹۲) و عکس این مطلب نیز واضح است.

با بکار بردن این قضیه بآسانی می توان بزرگترین مقسوم علیه مشترك چند عدد را بدست آورد .

مثال - می خواهیم بزرگترین مقسوم علیه مشترك اعداد ۴۳۲ ، ۷۵۶ و ۹۹۰ را حساب کنیم .

ابتدا بزرگترین مقسوم علیه مشترك اعداد ۴۳۲ و ۷۵۶ را حساب می کنیم ، حاصل ۱۰۸ می شود . بعد بزرگترین مقسوم علیه مشترك اعداد ۱۰۸ و ۹۹۰ را حساب می کنیم ، ۱۸ بدست می آید . پس بزرگترین مقسوم علیه مشترك اعداد مفروض ۱۸ است .

۹۵ - تعریف - اگر چند عدد  $a, b, c, d$  و ... مقسوم علیه مشتركی جز ۱ نداشته باشند می گویند این اعداد مابین هم اول هستند .

مثلا اعداد ۲۵۲، ۳۳۰ ، ۹۱۰ و ۹۴۵ مابین هم اول هستند (ولی دو بدو نسبت به هم اول نیستند) .

۹۶ - نتایج قاعده تقسیمات متوالی - خواص بزرگترین مقسوم علیه مشترك - اگر دو عدد  $a$  و  $b$  را در يك عدد ضرب یا بر یکی از مقسوم علیه های مشتركشان تقسیم کنیم ، باقیمانده تقسیم آنها  $r$  نیز در همان عدد ضرب یا بر همان عدد تقسیم می شود (شماره های ۶۲ و ۶۳) . و همچنین است باقیمانده تقسیم  $b$  بر  $r$  (که آن را  $r_1$  می نامیم) و به همین طریق تا آخرین باقیمانده مخالف صفر که عبارت است از بزرگترین مقسوم علیه مشترك اعداد  $a$  و  $b$  . این خاصیت را برای چند عدد نیز بآسانی می توان تعمیم داد ، پس :

قضیه - اگر دو یا چند عدد را در يك عدد ضرب یا بر یکی از مقسوم علیه های مشتركشان تقسیم کنیم ، بزرگترین مقسوم علیه مشترك آنها در همان عدد ضرب یا بر آن مقسوم علیه مشترك تقسیم می شود .

بخصوص اگر دو یا چند عدد را بر بزرگترین مقسوم علیه مشتركشان تقسیم کنیم خارج قسمتهای حاصل مابین هم اول هستند زیرا بزرگترین مقسوم علیه مشترك خارج قسمتها يك است .

برعکس اگر فرض کنیم که یکی از مقسوم علیه های مشترك اعداد  $a, b, c, d$  که آن را  $D$  می نامیم طوری باشد که خارج قسمتهای  $a' = a : D$  و  $b' = b : D$  و  $c' = c : D$  و  $d' = d : D$

مابین هم اول باشند، در این صورت بزرگترین مقسوم علیه مشترك اعداد

$$d = d'D \text{ و } c = c'D \text{ و } b = b'D \text{ و } a = a'D$$

عبارت است از  $1 \times D$  یعنی  $D$  ، پس می توان گفت :

قضیه - برای آنکه عددی مانند  $D$  بزرگترین مقسوم علیه مشترك اعداد  $a, b, c$  و ... باشد، لازم و کافی است که هر يك از این اعداد بر  $D$  قابل قسمت باشد و خارج قسمتهای آنها مابین هم اول باشند .

۹۷ - موارد استعمال در قابلیت تقسیم - قضیه زیر یکی از مهمترین قضاای حساب استدلالی است :

قضیه اصلی - اگر عددی حاصل ضرب دو عامل را بشمارد و با یکی از آنها اول باشد دیگری را خواهد شمرد .

برهان - فرض می کنیم که عدد  $c$  حاصل ضرب  $a \times b$  را بشمرد و با  $a$  اول باشد ، می خواهیم ثابت کنیم که  $c$  عدد  $b$  را می شمرد .

۱۰ واقع چون اعداد  $a$  و  $c$  نسبت به هم اول هستند بزرگترین مقسوم علیه مشترك آنها ۱ است. پس بزرگترین مقسوم علیه مشترك  $ab$  و  $cb$  عبارت است از  $b$ .

حال گوییم  $c$  عدد  $ab$  را بنا به فرض می‌شمرد و واضح است که  $c$  عدد  $cb$  را نیز می‌شمرد. پس چون  $c$  اعداد  $ab$  و  $bc$  را می‌شمرد، بزرگترین مقسوم علیه مشترك آنها یعنی  $b$  را نیز می‌شمرد و قضیه ثابت است.

**۹۸ - قضیه -** اگر عددی بر چند عدد که دو بدو نسبت به هم اول هستند قابل قسمت باشد بر حاصل ضرب آنها قابل قسمت خواهد بود.

**برهان -** فرض می‌کنیم که  $N$  بر اعداد  $a$ ،  $b$  و  $c$  که دو بدو نسبت به یکدیگر اول هستند قابل قسمت باشد، اگر خارج قسمت تقسیم  $N$  بر  $a$  را مساوی با  $q$  فرض کنیم، داریم:  $N = aq$  (۱)

چون عدد  $b$  حاصل ضرب  $aq$  را می‌شمارد و با  $a$  اول است پس  $q$  را نیز می‌شمارد و اگر خارج قسمت تقسیم  $q$  را بر  $b$  عدد  $q'$  فرض کنیم:

$$q = bq' \quad (۲)$$

همچنین  $c$  عدد  $N$  یا  $aq$  را می‌شمارد و چون با  $a$  اول است پس  $q$  را می‌شمارد حال چون عدد  $c$  عدد  $q$  را می‌شمارد، حاصل ضرب  $bq'$  را می‌شمارد و چون با  $b$  اول است پس  $q'$  را می‌شمارد و داریم:

$$q' = cq'' \quad (۳)$$

با در نظر گرفتن روابط ۱، ۲ و ۳ می‌توان نوشت:

$$N = abcq''$$

و از این تساوی برمی‌آید که  $N$  بر  $abc$  قابل قسمت است.

**تذکر -** واضح است که اگر عدد  $N$  به حاصل ضرب چند عامل قابل قسمت باشد، به هر يك از آن عوامل قابل قسمت است خواه این عوامل دو بدو نسبت به هم اول باشند خواه نباشند. در واقع اگر داشته باشیم  $N = abcq$  می‌توان این رابطه را چنین نوشت:  $(N = b \cdot acq)$  یعنی  $N$  بر  $b$  قابل قسمت است؛ ولی عکس این مطلب فقط وقتی صحیح است که چنانکه در قضیه قبل دیدیم اعداد  $a$ ،  $b$  و  $c$  دو بدو نسبت به هم اول باشند.

از اجتماع حکم فوق و قضیه قبل می‌توان نتیجه گرفت:

**نتیجه -** شرط لازم و کافی برای آنکه عدد  $N$  به حاصل ضرب چند عامل که دو بدو نسبت به هم اول هستند قابل قسمت باشد این است که  $N$  به هر يك از آنها قابل قسمت باشد.

از این نتیجه می‌توان قابلیت تقسیم بر بعضی اعداد را بدست آورد. برای آنکه عددی بر ۶ قابل قسمت باشد، لازم و کافی است که آن عدد به ۲ و ۳ قابل قسمت باشد.

برای آنکه عددی بر ۱۲ قابل قسمت باشد، لازم و کافی است که به ۴ و ۳ قابل قسمت باشد و ...

**۲ - کوچکترین مضرب مشترك دو یا چند عدد**

**۹۹ - عدد  $M$  را در صورتی مضرب مشترك اعداد  $a$ ،  $b$  و  $c$  می‌نامند که  $M$  بر جميع اعداد  $a$ ،  $b$  و  $c$  قابل قسمت باشد.**

اگر چند عدد دلخواه را در نظر بگیریم واضح است که حاصل ضرب آنها بر هر يك از آنها قابل قسمت است و بنابراین حاصل ضرب چند عدد یکی از مضربهای مشترك آنهاست. اگر این مضرب مشترك را در يك عدد دلخواه ضرب کنیم مضرب مشترك دیگری از اعداد مفروض بدست می آید. بنابراین اگر چند عدد دلخواه داشته باشیم این اعداد بینهایت مضرب مشترك دارند.

چون هر يك از مضربهای مشترك چند عدد از بزرگترین آنها بزرگتر یا لااقل مساوی با آن است، مابین مضربهای مشترك چند عدد یکی از همه کوچکتر است که آن را کوچکترین مضرب مشترك آن اعداد می نامند.

۱۰۰ - تعیین کوچکترین مضرب مشترك دو عدد - قضیه -

اگر اعداد  $a$  و  $b$  را در نظر بگیریم و بزرگترین مقسوم علیه مشترك آنها را  $D$  بنامیم، مضربهای مشترك  $a$  و  $b$  عبارتند از مضربهای  $\frac{ab}{D}$ .

برهان - اولاً فرض می کنیم  $m$  یکی از مضربهای مشترك اعداد  $a$  و  $b$  باشد، پس  $m$  به  $a$  و  $b$  قابل قسمت است. اگر خارج قسمتهای عدد  $m$  را بر  $a$  و  $b$  بترتیب  $p$  و  $q$  بنامیم داریم:

$$m = ap \quad \text{و} \quad m = bq \quad (۱) \quad \text{پس} \quad ap = bq \quad (۲)$$

از طرف دیگر اگر خارج قسمتهای تقسیم  $a$  و  $b$  را بر  $D$  بترتیب  $a'$  و  $b'$  بنامیم ( $a'$  و  $b'$  نسبت به هم اول هستند)، داریم:

$$a = a'D \quad \text{و} \quad b = b'D \quad (۳)$$

و رابطه ۲ را می توان چنین نوشت:

$$a'Dp = b'Dq \quad \text{یا} \quad a'p = b'q$$

حال چون عدد  $b'$  حاصل ضرب  $a'p$  را می شمارد و با  $a'$  اول است، معلوم می شود که عدد  $b'$  عدد  $p$  را نیز می شمارد و می توان نوشت:

$$p = kb' \quad (k \text{ عددی است صحیح})$$

و چون این مقدار  $p$  را در رابطه  $m = ap$  بگذاریم حاصل می شود  $m = ab'k$  و به جای  $b'$  مقدار آن را از رابطه  $b = b'D$  قرار دهیم

$$\text{حاصل می شود:} \quad m = \frac{ab}{D} \times k$$

ثانیاً پیداست که به ازای جمیع مقادیر  $k$  حاصل ضرب  $\frac{ab}{D} \times k$  مضرب مشترك  $a$  و  $b$  می باشد و قضیه ثابت است.

نتیجه ۱ - از روی قضیه فوق معلوم می شود که کوچکترین مضرب

مشترك اعداد  $a$  و  $b$  مساوی است با  $\frac{ab}{D}$ ، زیرا کوچکترین مقداری که

در عبارت  $\frac{ab}{D} \times k$  می توان به  $k$  نسبت داد مساوی است با ۱، پس: برای بدست آوردن کوچکترین مضرب مشترك دو عدد کافی است که یکی از آن دو عدد را بر بزرگترین مقسوم علیه مشتركشان تقسیم و حاصل را در دیگری ضرب کنیم.

مثال - می خواهیم کوچکترین مضرب مشترك اعداد ۱۸۰ و ۵۴ را تعیین کنیم.

بزرگترین مقسوم علیه مشترك این دو عدد مساوی است با ۱۸، پس کوچکترین مضرب مشترك آنها مساوی است با  $\frac{۱۸۰ \times ۵۴}{۱۸}$  یعنی ۵۴۰.

**نتیجه ۴-** اگر کوچکترین مضرب مشترك دو عدد  $a$  و  $b$  را

$$M \text{ بنامیم رابطه } m = k \times \frac{ab}{D} \text{ را می توان به صورت : } m = k \times M$$

نوشت ، یعنی :

مضربهای مشترك دو عدد عبارتند از مضربهای کوچکترین مضرب مشترك آنها .

**تبصره ۵-** اگر دو عدد نسبت به یکدیگر اول باشند، کوچکترین

مضرب مشترك آنها مساوی است با حاصل ضربشان . در غیر این صورت همیشه کوچکترین مضرب مشترك دو عدد از حاصل ضرب آنها کوچکتر است .

**۱۰۱ - تعیین کوچکترین مضرب مشترك چند عدد -**

اعداد  $a$  ،  $b$  و  $c$  را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که  $m$  یکی از مضربهای مشترك این اعداد باشد که بخصوص مضرب مشترك  $a$  و  $b$  نیز هست و اگر کوچکترین مضرب مشترك  $a$  و  $b$  را  $p$  بنامیم ،  $m$  مضرب  $p$  نیز خواهد بود . پس  $m$  مضرب مشترك  $p$  و  $c$  است .

برعکس اگر  $m'$  مضربی از  $p$  و  $c$  باشد مضرب  $a$  ،  $b$  و  $c$  نیز خواهد

بود ، پس :

برای تعیین کوچکترین مضرب مشترك چند عدد ابتدا کوچکترین مضرب مشترك دو عدد از آنها را تعیین می کنیم و مابین عدد حاصل و یکی دیگر از اعداد کوچکترین مضرب مشترك پیدا می کنیم و عمل را ادامه می دهیم؛ آخرین عدد حاصل همان کوچکترین مضرب مشترك مطلوب است .

ضمناً از استدلال فوق خاصیت اصلی کوچکترین مضرب مشترك:

چند عدد بدست می آید : مضربهای مشترك چند عدد عبارتند از مضربهای کوچکترین مضرب مشترك آنها .

**مثال -** می خواهیم کوچکترین مضرب مشترك اعداد ۱۸ ، ۵۴ ، ۸۱ و ۱۸۰ را تعیین کنیم .

کوچکترین مضرب مشترك ۵۴ و ۱۸ عبارت است از ۵۴ و کوچکترین مضرب مشترك اعداد ۵۴ و ۸۱ که بزرگترین مقسوم علیه مشتركشان ۲۷ است ، عبارت است از :  $\frac{54 \times 81}{27} = 162$  و کوچکترین مضرب مشترك اعداد ۱۶۲ و ۱۸۰ عبارت است از  $\frac{162 \times 180}{18} = 1620$  ( زیرا بزرگترین مقسوم علیه مشترك مابین این دو عدد ۱۸ است ) . پس کوچکترین مضرب مشترك اعداد ۱۸ ، ۵۴ ، ۸۱ و ۱۸۰ عبارت است از ۱۶۲۰ و مضربهای مشترك این اعداد عبارتند از مضربهای ۱۶۲۰ یعنی ۱۶۲۰ ،  $1620 \times 2$  ،  $1620 \times 3$  و ...

## مسائل

۱- ثابت کنید که دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم و دو عدد فرد متوالی نسبت به هم اول هستند .

۲- ثابت کنید که حاصل ضرب  $(a^2 + 1)(a^2 - 1)$  بر ۳۰ قابل قسمت است .

۳- ثابت کنید که حاصل ضرب  $n(n^2 - 4)$  ، اگر  $n$  زوج باشد ، بر ۴۸ قابل قسمت است .

۴- چون اعداد  $۱۱۶۷۹$  را بريك عدد صحيح تقسیم کنیم، باقیمانده‌ها بترتيب عبارتند از ۷ و ۸. مطلوب است تعیین این عدد. اگر مسئله دارای چند جواب است، همه آنها را تعیین کنید. (جواب: ۹ و ۱۲ و ۱۸ و ۲۶)  
۵- ثابت کنید که حاصل ضرب چهار عدد صحيح متوالی همواره بر ۲۴ قابل قسمت است.

۶- اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید که مجموع و تفاضل آنها جز اعداد ۱ و ۲ مقسوم علیه مشترك دیگری ندارند.

۷- می‌دانیم که بزرگترین مقسوم علیه مشترك عدد  $۱۵۲۴$  و عدد دیگری که از  $۱۵۲۴$  کوچکتر است مساوی است با ۱۲۷. مطلوب است تعیین آن عدد.  
(جواب: یکی از اعداد ۱۲۷ و ۶۳۵ و ۸۸۹ و ۱۳۹۷)

۸- دو عدد تعیین کنید که مجموعشان ۶۳ و بزرگترین مقسوم علیه مشتركشان ۹ باشد. (جواب: اولاً ۹ و ۵۴ ثانیاً ۱۸ و ۴۵ ثالثاً ۲۷ و ۳۶)

۹- ثابت کنید که بزرگترین مقسوم علیه مشترك اعداد  $a$  و  $b$  مساوی است با بزرگترین مقسوم علیه مشترك اعداد  $a+bn$  و  $a+b(n-1)$ .  
۱۰- مطلوب است تعیین عددی دورقمی که مساوی باشد با ۶ برابر مجموع مقادیر مطلق ارقامش. (جواب: ۵۴)

۱۱- ثابت کنید که اگر  $a$  و  $b$  دو عدد صحيح باشند، بزرگترین مقسوم علیه مشترك آنها مساوی است با بزرگترین مقسوم علیه مشترك اعداد  $۵a+۳b$  و  $۱۳a+۸b$ .

۱۲- مطلوب است تعیین دو عدد کوچکتر از ۱۰۰ در صورتی که می‌دانیم تفاضل آنها ۳۶ و بزرگترین مقسوم علیه مشتركشان ۱۲ می‌باشد.

(جواب: اولاً ۱۲ و ۴۸ ثانیاً ۲۴ و ۶۰ ثالثاً ۴۸ و ۸۴ رابعاً ۶۰ و ۹۶)

۱۳- ثابت کنید که اگر عدد  $A=۱۰۰a+۱۰b+c$  بر ۲۱ قابل قسمت باشد، عدد  $B=a-۲b+۴c$  نیز بر آن قابل قسمت خواهد بود.

۱۴- بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد ۱۴ است و در موقع تعیین این بزرگترین مقسوم علیه مشترك به وسیله قاعده تقسیمات متوالی سلسله خارج قسمتها عبارت است از ۳، ۸، ۲ و ۴. مطلوب است تعیین آن دو عدد.  
(جواب: ۳۳۱۸ و ۱۰۶۴)

۱۵- ثابت کنید که  $n$  هر چه باشد عدد  $۶n-۳۶$  بر ۳۵ قابل قسمت است.

۱۶- حاصل ضرب دو عدد ۱۵۱۲ و بزرگترین مقسوم علیه مشتركشان ۶ است. مطلوب است تعیین کوچکترین مضرب مشترك آنها. (جواب: ۲۵۲)

۱۷- مطلوب است تعیین عددی که چون آن را به  $۲۴۰۱۵۰۸$  و ۴۰۵ تقسیم کنیم باقیمانده همیشه ۲ باشد و اگر مسئله چند جواب دارد کوچکترین آنها را تعیین کنید. (جواب: کوچکترین آنها ۱۲۲ است)

۱۸- مطلوب است تعیین تمام اعداد صحيح دو رقمی بطوری که اگر هريك از آنها را بر ۵ و ۹ تقسیم کنیم، باقیمانده‌ها بترتيب ۳ و ۴ باشد.

(جواب: ۳۹ و ۸۴)

۱۹- مطلوب است تعیین کوچکترین عدد ۵ رقمی که اگر آن را بر ۸، ۱۵، ۳۲، ۴۶ تقسیم کنیم، باقیمانده‌ها بترتيب ۷، ۱۴، ۳۱ و ۴۵ شود.  
(جواب: ۱۱۰۳۹)

۲۰- به چه شرطی يك عدد بر اعداد ۵۰، ۱۲ و ۱۸ قابل قسمت است؟  
مورد استعمال - مطلوب است تعیین همه اعداد ۴ رقمی که بر ۵۰، ۱۲ و ۱۸ قابل قسمت باشند.

۲۱- کوچکترین مضرب مشترك دو عدد ۳۶۰ و حاصل ضرب آنها ۴۳۲۰ است. آن دو عدد را تعیین کنید.

(جواب: اولاً ۱۲ و ۳۶۰ ثانیاً ۲۴ و ۱۸۰ ثالثاً ۳۶ و ۱۲۰ رابعاً ۷۲ و ۳۰)

## اعداد اول

۱۰۲ - تعریف - هر عدد را که جز بر خودش و بزرگ بر هیچ عدد دیگر قابل قسمت نباشد عدد اول می نامند\* .

مانند ۷، ۱۱، ۱۹ و غیره . اما عدد ۶ را که به ۲ و ۳ قابل قسمت است غیر اول یا مرکب می نامند .

مطابق تعریف فوق عدد ۱ اول است ، با این حال چون در قضایایی که بعداً خواهیم دید همیشه اعداد به شکل عامل ضرب بکار خواهند آمد ، حذف عدد ۱ از سلسله اعداد اول اهمیتی ندارد ؛ از این به بعد هر وقت از عدد اول گفتگو شود ، مقصود اعداد اول بزرگتر از ۱ خواهد بود .

۱۰۳ - قضیه - هر عدد غیر اول لااقل يك مقسوم علیه اول دارد .

برهان - اگر عدد  $N$  اول نباشد ، يك یا چند مقسوم علیه خواهد داشت؛ ما بین این مقسوم علیه ها آن را که از همه کوچکتر است  $a$  می نامیم

\* عدد اول کدام است؟ این آن است که او را جز یکی نشمرد و او را هیچ پاره نبود مگر آنکه همان او بود . چون پنج که هیچ عدد او را نشمرد و یکی او را پنج بار بشمرد . و این یکی او را پنج يك بود از نام او آورده .  
(از کتاب التفهیم)

۲۲ - مطلوب است تعیین دو عدد که کوچکترین مضرب مشترکشان ۵۰۴ و بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان ۱۸ است .

(جواب : اولاً ۱۸ و ۵۰۴ ثانیاً ۷۲ و ۱۲۶)

۲۳ - مطلوب است تعیین دو عدد که مجموعشان ۲۶ و کوچکترین مضرب مشترکشان ۱۰۵ باشد .

۲۴ - ثابت کنید که عدد  $n^{12} - n$  همواره بر ۵۴۶ قابل قسمت است .

۲۵ - دو عدد قسمی پیدا کنید که حاصل ضرب بزرگترین مقسوم علیه مشترک

آن دو در کوچکترین مضرب مشترکشان ۱۸۹۰۰ باشد و نسبت آن دو عدد  $\frac{3}{7}$  شود .  
(آبان ۱۳۴۱)

۲۶ - سه عدد صحیح آنطور بیابید که اولاً مجموع مربعاتشان ۳۱۸۵ باشد و اگر آنها را بر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان تقسیم کنیم حاصل ضرب سه خارج قسمت ۲۲۸۰ و یکی از خارج قسمتها عدد اول باشد . (خرداد ۱۳۴۱)

۲۷ - بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد  $a$  و  $b$  برابر است با ۱۵؛ به فرض  $\frac{a}{b} = \frac{14}{5}$  آن دو عدد را پیدا کنید . (شهریور ۱۳۴۰)

۲۸ - کوچکترین مضرب مشترک سه عدد  $a, b, c$  برابر است با ۱۷۸۵ و بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو بدو آنها یعنی  $(a, b)$  ،  $(a, c)$  و  $(b, c)$  برابر است با ۱۷ . به فرض آنکه  $a + b + c = ۲۵۵$  باشد ، این سه عدد را پیدا کنید . (خرداد ۱۳۴۰)

۲۹ - بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۱۵ و کوچکترین مضرب مشترکشان ۹۰ می باشد ، این دو عدد را پیدا کنید . (شهریور ۱۳۳۹)

## اعداد اول

۱۰۲ - تعریف - هر عدد را که جز بر خودش و بزرگ بر هیچ عدد دیگر قابل قسمت نباشد عدد اول می نامند\* .

مانند ۷، ۱۱، ۱۹ و غیره . اما عدد ۶ را که به ۲ و ۳ قابل قسمت است غیر اول یا مرکب می نامند .

مطابق تعریف فوق عدد ۱ اول است ، با این حال چون در قضایایی که بعداً خواهیم دید همیشه اعداد به شکل عامل ضرب بکار خواهند آمد ، حذف عدد ۱ از سلسله اعداد اول اهمیتی ندارد ؛ از این به بعد هر وقت از عدد اول گفتگو شود ، مقصود اعداد اول بزرگتر از ۱ خواهد بود .

۱۰۳ - قضیه - هر عدد غیر اول لااقل يك مقسوم علیه اول دارد .

برهان - اگر عدد  $N$  اول نباشد ، يك یا چند مقسوم علیه خواهد داشت ؛ ما بین این مقسوم علیه ها آن را که از همه کوچکتر است  $a$  می نامیم

\* عدد اول کدام است؟ این آن است که او را جز یکی نشمرد و او را هیچ پاره نبود مگر آنکه همان او بود . چون پنج که هیچ عدد او را نشمرد و یکی او را پنج بار بشمرد . و این یکی او را پنج يك بود از نام او آورده .  
(از کتاب التفهیم)

۲۲ - مطلوب است تعیین دو عدد که کوچکترین مضرب مشترکشان ۵۰۴ و بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان ۱۸ است .

(جواب : اولاً ۱۸ و ۵۰۴ ثانیاً ۷۲ و ۱۲۶)

۲۳ - مطلوب است تعیین دو عدد که مجموعشان ۲۶ و کوچکترین مضرب مشترکشان ۱۰۵ باشد .

۲۴ - ثابت کنید که عدد  $n^{12} - n$  همواره بر ۵۴۶ قابل قسمت است .

۲۵ - دو عدد قسمی پیدا کنید که حاصل ضرب بزرگترین مقسوم علیه مشترک

آن دو در کوچکترین مضرب مشترکشان ۱۸۹۰۰ باشد و نسبت آن دو عدد  $\frac{3}{7}$  شود .  
(آبان ۱۳۴۱)

۲۶ - سه عدد صحیح آنطور بیابید که اولاً مجموع مربعاتشان ۳۱۸۵ باشد و اگر آنها را بر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان تقسیم کنیم حاصل ضرب سه خارج قسمت ۲۲۸۰ و یکی از خارج قسمت ها عدد اول باشد . (خرداد ۱۳۴۱)

۲۷ - بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد  $a$  و  $b$  برابر است با ۱۵؛ به فرض  $\frac{a}{b} = \frac{14}{5}$  آن دو عدد را پیدا کنید . (شهریور ۱۳۴۰)

۲۸ - کوچکترین مضرب مشترک سه عدد  $a, b, c$  برابر است با ۱۷۸۵ و بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو بدو آنها یعنی  $(a, b)$  ،  $(a, c)$  و  $(b, c)$  برابر است با ۱۷ . به فرض آنکه  $a + b + c = ۲۵۵$  باشد ، این سه عدد را پیدا کنید . (خرداد ۱۳۴۰)

۲۹ - بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۱۵ و کوچکترین مضرب مشترکشان ۹۰ می باشد ، این دو عدد را پیدا کنید . (شهریور ۱۳۳۹)

و می‌گوییم که  $a$  حتماً اول است، زیرا اگر  $a$  اول نباشد، مقسوم‌علیه‌ی جز ۱ و  $a$  خواهد داشت که آن را  $b$  ( $b < a$ ) فرض می‌کنیم حال چون  $b$  عدد  $a$  را می‌شمرد و  $a$  هم عدد  $N$  را،  $b$  هم عدد  $N$  را خواهد شمرد. در این صورت  $N$  دارای مقسوم‌علیه‌ی کوچکتر از  $a$  می‌باشد و این خلاف فرض است.

**نتیجه -** اگر دو عدد  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول نباشند، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها  $D$  بزرگتر از ۱ است.

حال اگر  $D$  اول باشد،  $a$  و  $b$  دارای یک مقسوم‌علیه مشترک اول هستند و اگر  $D$  اول نباشد، مطابق قضیه فوق  $D$  دارای مقسوم‌علیه اولی است که  $a$  و  $b$  را نیز می‌شمرد، پس می‌توان گفت:

**قضیه -** اگر دو عدد نسبت به یکدیگر اول نباشند، لااقل یک مقسوم‌علیه مشترک اول دارند.

**تبصره و تمرین -** قضیه فوق برای چند عدد که بین هم اول نباشند نیز صحیح است. آن را در این حالت بیان و ثابت کنید.

**۱۰۴ - قضیه -** سلسله اعداد اول نامحدود است، یعنی همواره می‌توان عدد اولی پیدا کرد که از عدد اول مفروضی بزرگتر باشد.

**برهان -** عدد اول  $a$  را در نظر می‌گیریم و حاصل ضرب جمیع اعداد صحیح اول از ۱ تا  $a$  را  $P$  می‌نامیم.

$$P = 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times \dots \times a$$

و به این حاصل ضرب یک واحد می‌افزاییم و عدد حاصل را  $N$  می‌نامیم:

$$N = 1 + P = 1 + 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times \dots \times a$$

اگر  $N$  عدد اول باشد، چون  $N$  از  $a$  بزرگتر است، قضیه ثابت است، و اگر  $N$  عدد اول نباشد، لااقل یک مقسوم‌علیه اول خواهد داشت (شماره ۱۰۳) که آن را  $d$  می‌نامیم. عدد  $d$  نمی‌تواند کوچکتر یا مساوی  $a$  باشد، زیرا در این صورت  $d$  یکی از عوامل حاصل ضرب  $P$  خواهد بود و این حاصل ضرب را خواهد شمرد و چون بنا به فرض  $d$  عدد  $N$  را نیز می‌شمرد، ناچار تفاضل  $N - P = 1$  را خواهد شمرد و چنین چیزی ممکن نیست. پس اگر  $d$  وجود داشته باشد، بزرگتر از  $a$  خواهد بود و بنابراین در هر دو حالت عدد اولی بزرگتر از  $a$  خواهیم داشت و قضیه ثابت است.

### ۱۰۵ - تعیین اعداد اول - چون سلسله اعداد اول نامحدود

است، نمی‌توان تمام آنها را تعیین کرد. تاکنون هیچ روش ساده عمومی برای تعیین اعداد اول و تشخیص آنها از اعداد غیر اول بدست نیامده است، بطوری‌که برای اعداد بزرگی که دارای مقسوم علیه ساده کوچک نباشند تشخیص اعداد اول از اعداد غیر اول بسیار مشکل و در غالب موارد غیرممکن است\*؛ فقط ممکن است اعداد اول کوچکتر از عدد مفروضی را معین کنیم. به عنوان مثال فرض کنیم که می‌خواهیم اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰ را معین کنیم. برای این کار سلسله طبیعی اعداد را از ۱ تا ۱۰۰

\* مشهور است که فرما ریاضیدان فرانسوی (۱۶۶۵-۱۶۵۱) قاعده‌ای برای تشخیص اعداد غیر اول می‌دانسته است اما چون در قرن هفدهم ما بین دانشمندان هم‌چشمی وجود داشت این قاعده را برای معاصران خود نگفت و مسئله مزبور تاکنون لاینحل مانده است. فرما یکی از اعجوبه‌های زمان خود و در علم حساب استاد بود و غالب قضایایی که وی بدون استدلال ذکر کرده است هنوز از جمله مشکلات علم است.

می نویسیم و ملاحظه می کنیم که :

اولاً هر عدد که به هیچیک از اعداد کوچکتر از خود جز يك قابل قسمت نباشد اول است. ثانیاً اگر سلسله طبیعی اعداد را تا هر جا که بخواهیم بنویسیم و مضربهای يك عدد را حذف کنیم ، مضربهای جميع اعداد حذف شده نیز حذف می شوند .

مثلاً اگر مضربهای عدد ۳ را حذف کنیم، مضربهای ۹، ۱۲، ۱۵ و غیره نیز حذف می شوند .

| ۱  | ۲  | ۳  | ۴  | ۵  | ۶  | ۷  | ۸  | ۹  | ۱۰  |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ | ۱۹ | ۲۰  |
| ۲۱ | ۲۲ | ۲۳ | ۲۴ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۸ | ۲۹ | ۳۰  |
| ۳۱ | ۳۲ | ۳۳ | ۳۴ | ۳۵ | ۳۶ | ۳۷ | ۳۸ | ۳۹ | ۴۰  |
| ۴۱ | ۴۲ | ۴۳ | ۴۴ | ۴۵ | ۴۶ | ۴۷ | ۴۸ | ۴۹ | ۵۰  |
| ۵۱ | ۵۲ | ۵۳ | ۵۴ | ۵۵ | ۵۶ | ۵۷ | ۵۸ | ۵۹ | ۶۰  |
| ۶۱ | ۶۲ | ۶۳ | ۶۴ | ۶۵ | ۶۶ | ۶۷ | ۶۸ | ۶۹ | ۷۰  |
| ۷۱ | ۷۲ | ۷۳ | ۷۴ | ۷۵ | ۷۶ | ۷۷ | ۷۸ | ۷۹ | ۸۰  |
| ۸۱ | ۸۲ | ۸۳ | ۸۴ | ۸۵ | ۸۶ | ۸۷ | ۸۸ | ۸۹ | ۹۰  |
| ۹۱ | ۹۲ | ۹۳ | ۹۴ | ۹۵ | ۹۶ | ۹۷ | ۹۸ | ۹۹ | ۱۰۰ |

نخستین عدد اول بعد از ۱ را که عدد ۲ است کنار می گذاریم و

تمام مضربهای ۲ یعنی عددهای زوج را حذف می کنیم (زیرشان خط می کشیم)، پس از عدد ۲ اولین عدد حذف نشده ۳ است، پس اول است (زیرا اگر اول نبود ناچار مضربی از ۲ بود و حذف می شد). حال تمام مضربهای ۳ را حذف می کنیم .

بعد از ۳ اولین عدد حذف نشده ۵ است، پس ۵ اول است . حال، تمام مضربهای ۵ را حذف می کنیم و عمل را به همین ترتیب ادامه می دهیم تا وقتی که دیگر هیچ عدد حذف کردنی باقی نماند. در این صورت تمام اعداد حذف نشده اول هستند . ضمناً ملاحظه می کنیم که برای حذف کردن مضربهای ۵، باید از  $۵ \times ۵ = ۲۵$  شروع کنیم، زیرا مضربهای کوچکتر، یعنی  $۲ \times ۵$  و  $۳ \times ۵$  قبلاً حذف شده اند .

**تبصره -** در نظر گرفتن مطلب زیر عمل را آسان می کند :

پس از آنکه مضربهای ۷ را حذف کردیم دیگر هیچ عدد حذف کردنی (غیر اول) در جدول فوق باقی نمی ماند. در واقع بعد از ۷ اولین عدد حذف نشده ۱۱ و ۱۱ اول است . اما مربع ۱۱ یعنی ۱۲۱ از ۱۰۰ بزرگتر است و اگر عدد غیر اولی در جدول باقی مانده باشد ناچار آن عدد مساوی خواهد بود با حاصل ضرب دو عدد که هر دو باید از ۱۱ بزرگتر یا با آن مساوی باشند (زیرا مضربهای اعداد کوچکتر از ۱۱ حذف شده اند). پس این عدد مساوی با ۱۲۱ یا بزرگتر از آن است بنابراین در جدول وجود ندارد .

از آنچه گذشت قاعده زیر برای تعیین اعداد اول کوچکتر از عدد مفروض  $a$  بدست می آید :

سلسله طبیعی اعداد را از ۱ تا عدد  $a$  می نویسیم و مضارب اعداد ۲، ۳ و ... را با در نظر گرفتن آنچه در شماره ۱۰۵ گفته شد حذف می کنیم و عمل را تا نخستین عدد اولی که مربع آن از  $a$  بزرگتر باشد ادامه می دهیم. در این صورت اعداد حذف نشده اول هستند.

### ۱۰۶ - تحقیق آنکه عدد مفروضی اول است یا نه - دیدیم

که روشی کلی برای تعیین اعداد اول وجود ندارد ، اما اگر جدولی از اعداد اول که شامل عدد مفروض یا شامل اعداد بزرگتر از آن است در دست باشد، می توانیم از روی آن تحقیق کنیم که عدد مفروض اول است یا نه (در آخر کتاب جدول اعداد اول کوچکتر از ۲۰۰۰ موجود است) . اگر چنین جدولی در دست نباشد ، چنین عمل می کنیم :

**مثال:** می خواهیم ببینیم عدد ۹۷ اول است یا نه . عدد ۹۷ را پی در پی به اعداد اول ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷ و ۱۱ تقسیم و ملاحظه می کنیم که در تمام این تقسیمها باقیمانده مخالف صفر است (اگر باقیمانده یکی از تقسیمها صفر شود عدد مفروض اول نیست) ، بعلاوه می بینیم که خارج قسمت تقسیم ۹۷ بر ۱۱ کوچکتر از ۱۱ است . در این صورت حکم می کنیم که عدد ۹۷ اول است . در واقع اگر ۹۷ اول نبود بر یکی از اعداد اول بزرگتر از ۱۱ قابل قسمت می شد و خارج قسمت این تقسیم ناچار کوچکتر از ۱۱ می بود ، زیرا وقتی مقسوم علیه زیاد شود خارج قسمت کم می شود . پس بایستی عدد ۹۷ مضرب یکی از اعداد اول کوچکتر از ۱۱ باشد و دیدیم که چنین نیست . از آنچه گذشت قاعده زیر بدست می آید :

**قاعده -** برای تحقیق آنکه عددی اول است یا نه آن را پی در پی به اعداد اول ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۱۱ ، ۱۳ و غیره تقسیم می کنیم و عمل را ادامه می دهیم تا یکی از دو حالت زیر رخ دهد: یا به تقسیمی برسیم که باقیمانده آن صفر باشد (در این حالت عدد مفروض اول نیست) ، یا ، در غیر این صورت،

به تقسیمی برسیم که در آن خارج قسمت از مقسوم علیه کوچکتر باشد (در این صورت عدد مفروض اول است) .

واضح است که این روش در مورد اعداد بزرگ بسیار مشاغل و گاهی عملاً غیر ممکن است .

### ۱۰۷ - تجزیه اعداد غیر اول به عوامل اول - (خواص اعداد اول) - قضیه - هر عدد اول نسبت به جمیع اعدادی که بر آن قابل قسمت نیستند اول است .

**برهان -** عدد اول  $p$  و عدد غیر اول  $N$  را در نظر می گیریم و فرض می کنیم  $N$  بر  $p$  قابل قسمت نباشد.

مقسوم علیه های مشترک اعداد  $p$  و  $N$  فقط  $p$  و ۱ می توانند باشند و چون به فرض  $N$  به  $p$  قابل قسمت نیست ، تنها مقسوم علیه مشترک اعداد  $p$  و  $N$  عدد ۱ است ، یعنی  $N$  و  $p$  نسبت به هم اول هستند (شماره ۹۳) .

**۱۰۸ - قضیه -** اگر حاصل ضرب  $abc$  بر عدد اول  $p$  قابل قسمت باشد ، لااقل یکی از عوامل  $a$  یا  $b$  یا  $c$  بر  $p$  قابل قسمت است .

**برهان -** اگر  $a$  بر  $p$  قابل قسمت نباشد ،  $a$  و  $p$  نسبت به یکدیگر اولند (شماره ۱۰۷) و لذا  $bc$  بر  $p$  قابل قسمت است (قضیه ۹۷) . حال اگر  $b$  بر  $p$  قابل قسمت باشد ، حکم ثابت است و اگر نباشد ،  $b$  و  $p$  نسبت به هم اول هستند ؛ و چون  $bc$  بر  $p$  قابل قسمت است ،  $c$  بر  $p$  قابل قسمت است .

**۱۰۹ - فرع -** اگر یکی از قوای عدد  $a$  بر عدد اول  $p$  قابل قسمت باشد ، خود  $a$  نیز بر  $p$  قابل قسمت است .

در واقع قوه  $m$  ام  $a$  عبارت است از حاصل ضرب  $m$  عامل مساوی با  $a$ .

**نتیجه -** اگر حاصل ضرب چند عدد اول بر عدد اولی مانند  $p$  قابل قسمت باشد، یکی از عوامل ضرب مساوی  $p$  خواهد بود.

زیرا يك عدد اول فقط وقتی بر عدد اول دیگری قابل قسمت است که با آن مساوی باشد.

**۱۱۰ - قضیه -** اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، دو قوه دلخواه این دو عدد نیز نسبت به هم اول هستند.

**برهان -** فرض کنیم که اعداد  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول باشند. اگر قوای  $a^m$  و  $b^n$  نسبت به هم اول نباشند، لازم می آید که يك مقسوم علیه مشترك اول داشته باشند (قضیه ۱۰۳)؛ و چون این مقسوم علیه مشترك هريك از اعداد  $a^m$  و  $b^n$  را می شمرد، ناچار باید  $a$  و  $b$  را نیز بشمرد (شماره ۱۰۹) و بنابراین  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول نخواهند بود و این خلاف فرض است.

**۱۱۱ - هر عدد غیر اول مساوی است با حاصل ضرب چند عدد اول -** فرض می کنیم که عدد  $N$  اول نباشد. پس  $N$  لا اقل يك مقسوم علیه اول دارد که آن را  $a$  می نامیم:  $N = aq$ . اگر  $q$  اول باشد،  $N$  حاصل ضرب دو عدد اول و قضیه ثابت است و اگر  $q$  اول نباشد، لا اقل دارای يك مقسوم علیه اول است که چون آن را  $q'$  بنامیم داریم:

$$q = bq' \quad \text{و لذا} \quad N = abq'$$

حال یا  $q'$  اول و قضیه ثابت است یا  $q'$  اول نیست و مقسوم علیه اولی دارد که آن را  $q''$  می نامیم، در این صورت داریم:  $q' = cq''$

ولذا  $N = abcq''$ . چون استدلال را به همین نحو ادامه دهیم نظر به اینکه سلسله خارج قسمتهای  $q, q', q'', \dots$  رفته رفته کوچک می شوند، این عمل بالاخره به يك خارج قسمت اول ختم خواهد شد که آن را  $k$  می نامیم. در این صورت داریم:  $N = abc \dots k$  و قضیه ثابت است.

**تبصره -** بعضی از عملهای  $a, b, c$  و ... ممکن است متساوی باشند، بنابراین در حالت کلی هر عدد غیر اول را می توان به صورت  $a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \dots$  در آورده که در آن  $a, b$  و  $c$  اعداد اول و  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$  اعداد صحیحند.

**تعریف -** اگر داشته باشیم  $N = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$  که در آن  $a, b$  و  $c$  اول باشند، هر يك از این اعداد را **عامل اول**  $N$  می نامند و می گویند  $N$  به **عاملهای اول تجزیه** شده است.

**۱۱۲ - قضیه -** هر عدد غیر اول فقط به يك شکل به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه می شود.

**برهان -** فرض کنیم اعداد  $a, b, c, d, a', b', c', d'$  اول باشند و در عین حال داشته باشیم:  $A = abcd$  و  $A = a'b'c'd'$  پس خواهیم داشت:  $abcd = a'b'c'd'$  (۱)

اما چون  $a$  طرف چپ تساوی فوق را می شمرد، ناچار طرف راست آن را نیز می شمرد. و چون همه اعداد مفروض اولند،  $a$  مساوی یکی از عوامل حاصل ضرب  $a'b'c'd'$  خواهد بود (شماره ۱۰۹)، مثلاً  $a = a'$ ، و بنابراین خواهیم داشت:

$$bcd = b'c'd'$$

و به طریق مشابهی ثابت می شود که  $b=b'$  و بعداً  $c=c'$  و غیره.  
 عدد عوامل یکی از طرفین تساوی (۱) نمی تواند کمتر از عدد عوامل طرف  
 دیگر باشد، زیرا اگر مثلاً داشته باشیم:  $abcd=a'b'c'd'e'$ ،  
 پس از آنکه ثابت کردیم که  $a=a'$  و  $b=b'$  و  $c=c'$  و  $d=d'$ ،  
 واضح می شود که داریم:  $e'=1$

**۱۱۳ - قاعده تجزیه يك عدد غير اول به عوامل اول -**  
 چون طبق قضیه فوق نتیجه این تجزیه همواره یکی است، در عمل برای  
 سهولت قاعده زیر را بکار می برند.

**قاعده -** برای تجزیه يك عدد غير اول به عوامل اول، ابتدا اگر  
 عدد مفروض بر ۲ که اولین عدد اول است قابل قسمت باشد، آن را بر این عامل  
 تقسیم می کنیم و در باره خارج قسمت، در صورت امکان، همین عمل را  
 تکرار می کنیم تا وقتی که دیگر خارج قسمت بر ۲ قابل قسمت نباشد.  
 آن وقت عامل ۳ را که دومین عدد اول است امتحان می کنیم و بعد از ۳  
 بترتیب عوامل ۵، ۷، ۱۱ و غیره را در صورت امکان هر چندبار که  
 ممکن باشد مقسوم علیه قرار می دهیم، تا وقتی که خارج قسمت خود  
 عدد اول شود.

**مثال -** صورت عمل تجزیه عدد ۳۶۰ به عوامل اول چنین است:

|     |   |                                 |
|-----|---|---------------------------------|
| ۳۶۰ | ۲ |                                 |
| ۱۸۰ | ۲ |                                 |
| ۹۰  | ۲ |                                 |
| ۴۵  | ۳ |                                 |
| ۱۵  | ۳ |                                 |
| ۵   | ۵ | $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ |
| ۱   |   |                                 |

**۱۱۴ - مورد استعمال تجزیه اعداد به عوامل اول - قاعده -**  
 شرط لازم و کافی برای آنکه عدد  $N$  بر  $a$  قابل قسمت باشد، آن است که  
 هر يك از عوامل اولی که از تجزیه عدد  $a$  حاصل می شوند با نمایندۀ لاقبل متساوی  
 در تجزیه عدد  $N$  وجود داشته باشند.

**برهان -** اولاً شرط لازم است - زیرا اگر  $N$  بر  $a$  قابل قسمت  
 باشد، داریم:  $N=aq$ . پس  $N$  شامل جمیع عوامل اول  $a$  با نمایندۀ  
 لاقبل متساوی خواهد بود.

**ثانیاً شرط کافی است -** در واقع اگر عدد  $N$  شامل جمیع عوامل  
 اول  $a$  با نمایندۀ لاقبل متساوی باشد، می توان آن را به صورت حاصل  
 ضرب دو عدد که یکی از آنها مساوی  $a$  باشد نوشت:

**مثال -**  $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$  و  $90 = 2 \times 3^2 \times 5$   
 پس می توان نوشت:  $360 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 2^2 = 90 \times 4$

**۱۱۵ - تعیین مقسوم علیه های يك عدد -** عدد ۳۶۰ را در نظر  
 می گیریم. چنانکه می دانیم نتیجه تجزیه این عدد به عوامل اول  
 چنین است:  $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

حال برای یافتن مقسوم علیه های عدد ۳۶۰ باید عده هایی تشکیل  
 داد که فقط از عوامل ۲، ۳ و ۵ یا بعضی از آنها مرکب باشد و در آنها  
 نمایندۀ این عوامل بترتیب از ۲، ۳ و ۱ بزرگتر نباشند، برای این  
 کار جدولی تشکیل می دهیم که سطر اول آن شامل ۱ و قوای متوالی  
 عدد ۲ تا ۲<sup>۳</sup> و سطر دوم آن شامل ۱ و قوای ۳ تا ۳<sup>۲</sup> و سطر سوم آن شامل  
 ۱ و ۵ باشد:

$$(۱) \quad \begin{array}{cccc} ۲^۳ & ۲^۲ & ۲ & ۱ \\ & ۳^۲ & ۳ & ۱ \\ & & ۵ & ۱ \end{array}$$

حال هر يك از اعداد سطر اول را پی در پی در هر يك از اعداد سطر دوم و سپس تمام اعداد حاصل را در هر يك از اعداد سطر سوم ضرب می کنیم:

$$\left. \begin{array}{cccc} ۸ & ۴ & ۲ & ۱ \\ ۲۴ & ۱۲ & ۶ & ۳ \\ ۷۲ & ۳۶ & ۱۸ & ۹ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حاصل ضربهای اعداد سطر اول در اعداد} \\ \text{سطر دوم} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{cccc} ۴۰ & ۲۰ & ۱۰ & ۵ \\ ۱۲۰ & ۶۰ & ۳۰ & ۱۵ \\ ۳۶۰ & ۱۸۰ & ۹۰ & ۴۵ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حاصل ضربهای اعداد حاصل در } ۵ \end{array}$$

طریقه عملی :

$$\begin{array}{c|c|c} & ۱ & \\ \hline ۳۶۰ & ۲ & ۲ \\ ۱۸۰ & ۲ & ۴ \\ ۹۰ & ۲ & ۸ \\ ۴۵ & ۳ & ۳ \text{ و } ۶ \text{ و } ۱۲ \text{ و } ۲۴ \\ ۱۵ & ۳ & ۹ \text{ و } ۱۸ \text{ و } ۳۶ \text{ و } ۷۲ \\ ۵ & ۵ & ۵ \text{ و } ۱۰ \text{ و } ۲۰ \text{ و } ۴۰ \text{ و } ۱۵ \text{ و } ۳۰ \text{ و } ۶۰ \text{ و } ۱۲۰ \\ ۱ & & ۴۵ \text{ و } ۹۰ \text{ و } ۱۸۰ \text{ و } ۳۶۰ \end{array}$$

اعداد حاصل مطابق قضیه ۱۱۴ ، مقسوم علیه های عدد ۳۶۰ هستند، زیرا اولاً هر عدد دلخواه از جدول فوق شامل عاملهای اول دیگری جز عاملهای عدد ۳۶۰ ، آن هم با نماینده های مساوی یا کوچکتر نیست . ثانیاً دو عدد دلخواه از جدول فوق با یکدیگر یا از لحاظ عاملهای اول یا از لحاظ نماینده متفاوت هستند. ثالثاً تمام مقسوم علیه های N در جدول

فوق وجود دارند زیرا تمام ترکیبهای ممکن را از حاصل ضربهای مزبور در نظر گرفته ایم .

**۱۱۶- مقسوم علیه های يك عدد -** در مثال شماره ۱۱۵ ، چون چهار عدد سطر اول جدول (۱) را در ۳ عدد سطر دوم همان جدول ضرب کردیم ، شماره حاصل ضربهای حاصل عبارت است از  $(۳+۱)(۲+۱)$  . و چون هر يك از این حاصل ضربها را در دو عدد سطر آخر ضرب کردیم ، شماره تمام حاصل ضربهای حاصل ، یعنی شماره مقسوم علیه های ۳۶۰ ، عبارت است از :  $(۱+۱)(۲+۱)(۳+۱)$  . حال با ملاحظه اینکه ۳ ، ۲ و ۱ بترتیب نماینده های عوامل اول عدد ۳۶۰ هستند ، می توان گفت : **قضیه -** عدد مقسوم علیه های هر عدد چنین بدست می آید که هر يك از نماینده های عوامل اول آن را با ۱ جمع و حاصلها را در هم ضرب کنیم . **تبصره ۱-** باید متوجه بود که مثلاً در تجزیه عدد  $۳۶۰ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵$  نماینده عامل ۵ مساوی است با ۱ .

**تبصره ۲-** اگر حاصل تجزیه عددی به صورت  $a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \dots$  باشد ، عدد مقسوم علیه های آن عبارت است از :

$$(\alpha+۱)(\beta+۱)(\gamma+۱)\dots$$

**۱۱۷- بزرگترین مقسوم علیه مشترك چند عدد -** چند عدد را در نظر می گیریم و هر يك از آنها را به عاملهای اولشان تجزیه می کنیم :

$$A = ۲^۴ \times ۳ \times ۵^۲$$

$$B = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۷^۲$$

$$C = ۲^۵ \times ۳ \times ۷$$

می بینیم که فقط عاملهای اول ۲ و ۳ مابین  $A$ ،  $B$  و  $C$  مشترکند .  
 حال گوییم که اولاً هیچیک از مقسوم علیه های مشترک اعداد  $A$ ،  
 $B$  و  $C$  نمی توانند عاملهای اولی جز ۲ و ۳ که مابین  $A$ ،  $B$  و  $C$   
 مشترکند داشته باشند ، پس اگر  $d$  یکی از مقسوم علیه های مشترک  $A$ ،  
 $B$  و  $C$  باشد ، به این صورت تجزیه می شود :  $d = 2^\alpha \times 3^\beta$  ثانیاً  $\alpha$   
 نمی تواند بزرگتر از ۳ باشد ، زیرا  $d$  عدد  $B$  را می شمرد و  $\beta$  نیز نمی-  
 تواند بزرگتر از ۳ باشد ، زیرا  $d$  اعداد  $A$  و  $C$  را می شمرد . پس خواهیم  
 داشت :  $\alpha = 0$  یا ۱ یا ۲ یا ۳ و  $\beta = 0$  یا ۱

پس بزرگترین مقدار  $d$  نظیر  $\alpha = 3$  و  $\beta = 1$  است ، یعنی بزرگترین  
 مقسوم علیه مشترک اعداد  $A$ ،  $B$  و  $C$  عبارت است از :

$$2^3 \times 3 = 24$$

از آنچه گذشت قضیه زیر نتیجه می شود :

**قضیه -** برای بدست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک چند عدد ،  
 می توان هر يك از آن اعداد را به عوامل اول تجزیه و حاصل ضرب عوامل  
 مشترك را با كوچكترین نماینده هر يك از آنها حساب کرد ؛ این حاصل ضرب  
 بزرگترین مقسوم علیه مشترك اعداد مفروض است .

**۱۱۸- كوچكترین مضرب مشترك چند عدد -** چند عدد را در  
 نظر می گیریم و هر يك از آنها را به عاملهای اولشان تجزیه می کنیم ،

مثلاً :

$$A = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$$

$$B = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$$

$$C = 2^5 \times 3 \times 7 \times 11$$

هر يك از مضربهای مشترك اعداد  $A$ ،  $B$  و  $C$  لا اقل شامل عاملهای  
 اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ هستند که بین اعداد  $A$ ،  $B$  و  $C$  مشترکند ،  
 پس اگر  $m$  یکی از مضربهای مشترك  $A$ ،  $B$  و  $C$  باشد و آن را به عوامل  
 اولش تجزیه کنیم ، در این تجزیه عاملهای ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ حتماً  
 وجود خواهند داشت . اما نماینده عامل ۲ نمی تواند کوچکتر از ۵ باشد  
 زیرا  $m$  بر  $C$  قابل قسمت است و نیز نماینده عامل ۳ نمی تواند کوچکتر  
 از ۳ باشد ، زیرا  $m$  بر  $A$  قابل قسمت است ؛ و به همین طریق نماینده  
 عامل ۵ از ۲ و نماینده عامل ۷ نیز از ۲ کوچکتر نیست . پس  $m$  را به  
 صورت زیر می توان نوشت :

$$m = 2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times k \quad (k \text{ عددی است صحیح و اختیاری})$$

بنابراین كوچكترین مضرب مشترك اعداد  $A$ ،  $B$  و  $C$  عبارت

$$\text{است از : } 2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11$$

از آنچه گذشت قضیه زیر بدست می آید :

**قضیه -** برای بدست آوردن كوچكترین مضرب مشترك چند عدد  
 می توان هر يك از آن اعداد را به عوامل اولش تجزیه کرد و حاصل ضرب جمیع  
 عوامل مشترك و غیر مشترك را با بزرگترین نماینده آنها حساب کرد . این حاصل  
 ضرب كوچكترین مضرب مشترك اعداد مفروض است .

### مسائل

۱ - تحقیق کنید که آیا اعداد زیر اول هستند یا نه ؟

$$۱۲۱ ، ۱۱۳ ، ۱۳۷ ، ۳۶۵ ، ۳۷۳ ، ۶۷۱ و ۴۰۰۱$$

۲ - ثابت کنید که هر عدد اول غیر از ۲ و ۳ ، مضربی است از ۶ بعلاوه

یا منهای يك ،

۳- بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك و كوچكترین مضرب مشترك هر دسته از اعداد زیر را به وسیله تجزیه به عوامل اول تعیین کنید (۱۹۲ و ۲۵۸)، (۱۲۰ و ۱۶۸۰)، (۱۴۴ و ۳۷۸ و ۶۷۵) و (۵۴۰ و ۴۶۸).

۴- بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد  $D=۳۶$  و كوچكترین مضرب مشترك آنها  $M=۷۵۶$  است. آن دو عدد را تعیین کنید.

۵- مقسوم و باقیمانده يك تقسیم بترتیب عبارتند از ۸۵ و ۸. مطلوب است تعیین مقسوم‌علیه و خارج قسمت.

$$\left. \begin{array}{l} \text{مقسوم‌علیه} = ۱۱ \\ \text{مقسوم‌علیه} = ۷۷ \end{array} \right\} \text{جواب}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{خارج‌قسمت} = ۷ \\ \text{خارج‌قسمت} = ۱ \end{array} \right\}$$

۶- دو عدد ۲۴۳۹۳۶ و ۵۵۴۴ را به عوامل اول تجزیه و از آن رو ثابت کنید که عدد نخست بر عدد دوم قابل قسمت است و خارج قسمت را نیز تعیین کنید.

۷- ثابت کنید که  $a$  و  $b$  هرچه باشند ( $a > b$ ) یکی از اعداد  $a$  و  $b$  و  $a+b$  و  $a-b$  و  $۲a+b$  و  $۲a-b$  بر ۵ قابل قسمت است.

۸- دو عدد صحیح چنان تعیین کنید که اگر آنها را بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشتركشان تقسیم کنیم مجموع خارج قسمت‌ها ۷ باشد و اگر حاصل ضرب آنها را بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشتركشان تقسیم کنیم عدد ۶۰ بدست آید. (جواب: اول ۶۰ و ۱۰ دوم ۳۰ و ۱۲ سوم ۲۰ و ۱۵)

۹- مطلوب است تعیین عددی که ۶۳ مقسوم‌علیه دارد و مجموع تمام مقسوم‌علیه‌های آن ۵۱۱۸۱ است.

۱۰- كوچكترین عددی را که بر جمیع اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ قابل قسمت است بدست آورید.

(جواب: ۲۷۷۲۰)

۱۱- مطلوب است تعیین اعدادی که از ۱۰۰۰ كوچكتر و بر تمام عددهای ۴، ۵، ۶ و ۸ قابل قسمت باشند.

(جواب:  $۱۲۰k$  در صورتی که  $k$  عدد صحیح كوچكتر از ۹ باشد)

۱۲- هرگاه دو عدد  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول باشند ثابت کنید:

الف -  $a+b$  و  $a \times b$  نسبت به هم اولند.

ب -  $a-b$  و  $a \times b$  نسبت به هم اولند.

۱۳- ثابت کنید دو عدد  $۲n+۱$  و  $n(n+۱)$  همواره نسبت به هم اولند.

۱۴- ثابت کنید که اگر  $n$  بزرگتر از ۲ باشد، عدد  $(۱۶-n^۴)(n^۴-۱)(n^۴-۶۰۰)$  قابل قسمت است.

۱۵- اگر  $a$  و  $b$  با اعداد ۲، ۳ و ۵ اول باشند  $a^۴-b^۴$  بر ۲۴۰ بخش‌پذیر است.

۱۶- اگر  $a$  عدد فرد و با پنج اول باشد، حاصل ضرب:

$$(a^۲-۴۹)(a^۲-۹)(a^۲-۱) \text{ بر } ۲۳۰۴۰ \text{ قابل قسمت است.}$$

۱۷- ثابت کنید که اگر رقم یکان عدد  $a$  مساوی با ۴ باشد ولی  $a$  بر ۴ قابل قسمت نباشد، عدد  $(a^۲-۴)(a^۲-۱)$  بر ۴۸۰ قابل قسمت است.

۱۸- ثابت کنید که عدد مقسوم‌علیه‌های هر عدد که مربع کامل باشد فرد است و هر عدد که مربع کامل نباشد عدد مقسوم‌علیه‌های زوج است.

۱۹- ثابت کنید که عدد  $۲۴۲-۱$  بر ۱۸۹۶۳ بخش‌پذیر است.

۲۰- ثابت کنید که عدد  $۳۴۰-۱$  بر ۳۹۶۸۸۰ بخش‌پذیر است.

۲۱- مطلوب است تعیین روش کلی برای بدست آوردن طول اضلاع مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع آنها اعداد صحیح باشند و يك ضلع زاویه قائمه هريك از آنها عدد صحیح  $c$  باشد.

مثال:  $c=۱۳$  و  $c=۱۴$

۲۲- مطلوب است تعیین دو عدد که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آنها

۱۲۵۰ است در صورتی که می‌دانیم اولی ۲۱ مقسوم‌علیه و دومی ۱۰ مقسوم‌علیه دارد.

## کسرها

### ۱ - تعریف کسر و خواص آن

۱۱۹- در هندسه انواع مختلف کمیتها مانند قطعه خط و زاویه و کمان دایره و غیره را دیده و دربارهٔ هر يك از آنها تساوی و جمع را تعریف کرده‌ایم؛ این کمیتها را **اندازه پذیر\*** می‌نامند. بطور کلی هر کمیت که بتوانیم در بارهٔ آن تساوی و جمع را تعریف کنیم **اندازه پذیر** نامیده می‌شود **\*\***.

در این کتاب هر جا از کمیت گفتگو بمیان آوریم مقصود همان کمیت اندازه پذیر خواهد بود و برای سهولت بیان در این فصل تعاریف و استدلالها را غالباً در بارهٔ **پاره خط** که یکی از کمیتهای اندازه پذیر است ذکر خواهیم کرد ولی این استدلالها کلی است و می‌توان آنها را

**Mesurable \***

**\*\* مثل قطعه خط :**

دو پاره خط **AB** و **CD** را متساوی گوئیم هرگاه بتوانیم آنها را بر یکدیگر چنان منطبق کنیم که نقطهٔ **A** بر **C** و نقطهٔ **B** بر **D** قرار گیرد. هرگاه دو پاره خط **AB** و **BC** روی يك خط راست و در دو طرف انتهای مشترکشان یعنی **B** قرار داشته باشند، قطعه خط **AC** را مجموع دو پاره خط **AB** و **BC** می‌نامند.

**A      B      C**

-۱۱۴-

۲۳- ثابت کنید اگر **a** و **b** نسبت به هم اول باشند،  $a^n + b^n$  و  $ab$  نسبت به هم اولند.

۲۴- کوچکترین عددی را پیدا کنید که دارای ۶ مقسوم علیه باشد.

۲۵- عدد **N** پس از تجزیه به عوامل اول به صورت  $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma$

نوشته شده است. مطلوب است تعیین  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  هرگاه بدانیم  $\frac{N}{a}$  دارای ۲۵۲

مقسوم علیه است و **N** بترتیب ۴۵ و ۳۵ مقسوم علیه بیش از  $\frac{N}{b}$  و  $\frac{N}{c}$  دارد.

(شهریور ۱۳۳۵)

۲۶- ثابت کنید دستگاه 
$$\begin{cases} x+y=z \\ 4xy=z \end{cases}$$
 دارای جواب صحیح نیست.

(خرداد ۱۳۳۹)

۲۷- عدد سه رقمی  $N = \overline{udu}$  را آنطور بیابید که مجذور کامل و مضرب ۱۱ باشد.

(اردیبهشت ۱۳۴۱)

$a = bq$  و چون طرفین این تساوی را در  $m$  ضرب کنیم، حاصل می شود  $am = bmq$  و از آنجا  $q = \frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ .

**تبصره ۱ -** با استفاده از قضیه فوق می توان چند نسبت را به این ترتیب به يك مخرج تحويل كرد كه صورت و مخرج هر نسبت را در حاصل ضرب مخرجهای باقی نسبتها ضرب کنیم.

**تبصره ۲ -** چون داریم  $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$ ، اگر به جای صورت و مخرج نسبت مفروضی خارج قسمت کامل آنها را بر يك عدد قرار دهیم، نسبت جدید با نسبت مفروض مساوی خواهد بود.

**۱۸۶ -** نسبتها دارای همان خواص کسرهایی هستند و قواعد جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کسرها را می توان در باره آنها بکار برد.

**۱۸۷ - قضیه -** هر سه چند نسبت متساوی باشند، نسبتی که صورتش مجموع صورتهای و مخرجش مجموع مخرجهای آنها باشد، با هر يك از آن نسبتها مساوی است.

**برهان -** اگر نسبتهای متساوی  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{a'}{b'}$  و  $\frac{a''}{b''}$  را در نظر بگیریم و مقدار مشترك آنها را  $q = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$  بنامیم، داریم  $a = bq$  و  $a' = b'q$  و  $a'' = b''q$ ؛ و از آنجا  $a + a' + a'' = q(b + b' + b'')$  در نتیجه  $q = \frac{a + a' + a''}{b + b' + b''}$ .

**تبصره -** به همین ترتیب معلوم می شود که :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a - a'}{b - b'}$$

۲ = تناسب

**۱۸۸ - تعریف -** چون بنویسیم که دو نسبت با هم مساویند، يك

## نسبت و تناسب

### ۱ = نسبت دو عدد

**۱۸۴ - تعریف -** نسبت عدد  $a$  به عدد  $b$  عددی است که اگر  $b$  را در آن ضرب کنیم  $a$  حاصل شود. پس در واقع نسبت عدد  $a$  به عدد  $b$  خارج قسمت کامل آنهاست (در این تعریف  $a$  و  $b$  ممکن است صحیح یا کسری یا اعشاری باشند).

اگر دو عدد  $a$  و  $b$  اصم نباشند، نسبت آنها عددی است صحیح یا کسری و اگر تنها یکی از آنها اصم باشد، نسبت آنها اصم خواهد بود. در هر حال نسبت  $a$  را به  $b$  به صورت  $\frac{a}{b}$  نمایش می دهند و  $a$  را صورت و  $b$  را مخرج می خوانند و صورت و مخرج را دو جمله نسبت می نامند\*؛ اگر مقدار نسبت  $a$  به  $b$  را با  $q$  نمایش دهیم، داریم  $\frac{a}{b} = q$  و نظر به تعریف فوق  $a = bq$ ؛ پس دورا بطله  $\frac{a}{b} = q$  و  $a = bq$  يك معنى دارند.

**۱۸۵ - قضیه -** اگر دو جمله يك نسبت را در يك عدد ضرب کنیم نسبتی بدست می آید که با اولی مساوی است.

**برهان -** مقدار نسبت  $\frac{a}{b}$  را  $q$  می نامیم. در این صورت داریم:

\* در الفهیم صورت نسبت را مقدم و مخرج آن را تالی نامیده اند: مقدم و تالی کدامند؟ مقدم آن بود که از دو چیز به نسبت نخستین یادکنی و تالی آن بود که از پس یادکنی و مقدم را بدو منسوب کنی.

تساوی بدست می آید که آن را تناسب می نامند. مثلاً  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  يك تناسب است که  $a$  و  $d$  را دو طرف و  $b$  و  $c$  را دو وسط آن می نامند.

**۱۸۹- خاصیت اصلی تناسب - قضیه -** در هر تناسب، حاصل ضرب دو طرف مساوی است با حاصل ضرب دو وسط.

**برهان -** چون دو طرف تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  را در  $bd$  ضرب کنیم، حاصل می شود:

$$ad = bc$$

**۱۹۰- قضیه عکس -** هرگاه چهار عدد چنان مفروض باشند که حاصل ضرب دو عدد از آنها مساوی با حاصل ضرب دو عدد دیگر باشد، با آن چهار عدد می توان يك تناسب تشکیل داد.

**برهان -** چهار عدد  $a, b, c, d$  را در نظر گرفته فرض می کنیم که  $ad = bc$  باشد. می خواهیم ثابت کنیم که  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . برای این کار دو طرف تساوی  $ad = bc$  را بر  $bd$  تقسیم می کنیم، حاصل می شود  $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$  و از آنجا  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

**نتیجه ۱- قضیه فوق و عکس آن** می رساند که در هر تناسب می توان جای دو وسط را باهم و جای دو طرف را باهم عوض کرد و چون دو طرف هر تساوی را می توان جابجا کرد، نتیجه می شود که هر تناسب را می توان به هشت صورت زیر نوشت:

$$\begin{array}{llll} (۱) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & (۲) \frac{a}{c} = \frac{b}{d} & (۳) \frac{d}{b} = \frac{c}{a} & (۴) \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \\ (۵) \frac{c}{d} = \frac{a}{b} & (۶) \frac{b}{d} = \frac{a}{c} & (۷) \frac{c}{a} = \frac{d}{b} & (۸) \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \end{array}$$

**نتیجه ۲- از خاصیت اصلی تناسب می توان استفاده کرد و به فرض معلوم بودن سه جمله تناسب جمله چهارم آن را حساب کرد.**

**۱۹۱- واسطه هندسی -** اگر دو وسط یا دو طرف يك تناسب

متساوی باشند، یکی از آنها را **واسطه هندسی** دو جمله دیگر تناسب می نامند. مثلاً در تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$ ، عدد  $b$  واسطه هندسی است مابین  $a$  و  $d$  و می توان نوشت:

$$b^2 = ad \quad \text{و از آنجا} \quad b = \sqrt{ad}$$

**۱۹۲- ترکیب و تفصیل نسبت -** اگر به دو طرف تساوی

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

عدد ۱ را بیفزاییم حاصل می شود  $1 + \frac{a}{b} = 1 + \frac{c}{d}$  یا:

(۱)

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

این عمل را ترکیب نسبت می نامند. حال اگر عدد ۱ را از دو طرف تساوی  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  کم کنیم، یا اگر این عمل ممکن نباشد، چون طرفین تساوی مزبور را از عدد ۱ کم کنیم، حاصل می شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{a}{b} = 1 - \frac{c}{d} \\ \frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d} \end{array} \right. \quad (۲) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \\ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \end{array} \right. \quad \text{یا:}$$

و این عمل را تفصیل نسبت می خوانند.

بالاخره چون تساوی (۱) را عضو بعضو بر تساوی (۲) تقسیم کنیم، حاصل می شود:

$$\frac{a+b}{b-a} = \frac{c+d}{d-c} \quad \text{یا:} \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

**۳- تقسیم به نسبت**

**۱۹۳- تعریف -** می گویند اعداد  $x, y, z$  و ... به ترتیب با  $a$ ،

$b, c$  و ... متناسبند، هرگاه تساویهای زیر برقرار باشد:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \dots$$

۱۹۴- تعریف - تقسیم عدد  $N$  به نسبت اعداد  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، یعنی پیدا کردن سه عدد که مجموعشان مساوی با  $N$  باشد و خودشان با اعداد  $a$ ،  $b$  و  $c$  متناسب باشند.

دستور کلی - می‌خواهیم عدد  $N$  را به نسبت اعداد  $a$ ،  $b$  و  $c$  تقسیم کنیم؛ اگر قسمتهای مطلوب را  $x$ ،  $y$  و  $z$  بنامیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{N}{a+b+c}$$

$$\text{پس } x = \frac{Na}{a+b+c} \text{ و } y = \frac{Nb}{a+b+c} \text{ و } z = \frac{Nc}{a+b+c}$$

۱۹۵- برای آنکه عددی را به نسبت چند کسر تقسیم کنیم، ابتدا کسرها را به يك مخرج تحويل و سپس آن عدد را به نسبت صورتها تقسیم می‌کنیم.

### مسائل

۱- ثابت کنید که اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، روابط زیر برقرار است:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} \quad (\text{الف}) \quad \frac{a^3}{b^3} = \frac{c^3}{d^3} \quad (\text{ب}) \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}} \quad (\text{ج}) \quad \frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{a}{b}$$

۲- ثابت کنید که از تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  روابط زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{ac}{bd} = \frac{(a+c)^2}{(b+d)^2} \quad \text{و} \quad \frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$$

۳- نسبت دو عدد مثل ۲ است به ۳ و اگر ۹ واحد به هریک از آنها اضافه کنیم، نسبت اعداد حاصل مثل ۳ است به ۴. مطلوب است تعیین این دو عدد. (جواب: ۱۸ و ۲۷)

## فصل دهم

### خطاها

قبلا به وسیله يك مثال، موضوعی را که می‌خواهیم مورد مطالعه قرار دهیم، تشریح می‌کنیم. فرض کنیم که با در دست داشتن قطعه چوبی به طول يك متر بخواهیم مساحت سطح يك حیاط مستطیل شکل را حساب کنیم. واضح است که ابتدا باید طول و عرض حیاط را اندازه بگیریم. حال فرض می‌کنیم که عرض حیاط بین ۱۵ متر و ۱۶ متر و طول آن بین ۲۵ و ۲۶ متر محصور باشد.

از روی این اندازه‌ها فقط معلوم می‌شود که مساحت حیاط بین  $375 = 25 \times 15$  و  $416 = 26 \times 16$  متر مربع محصور است. اگر اندازه‌های تحقیقی طول و عرض حیاط معلوم بود، با يك عمل ضرب می‌توانستیم مساحت صحیح را بدست آوریم. در این مبحث می‌خواهیم قاعده‌هایی بیابیم که به وسیله آن درجه تقریب يك سلسله اعمال را معین کنیم بدون آنکه مجبور باشیم هریک از آنها را تکرار کنیم.

يك سؤال دیگر نیز اینجا پیش می‌آید و آن این است که اگر بخواهیم مساحت حیاط را با تقریب معینی پیدا کنیم، با چه تقریبی باید طول و عرض حیاط را بدانیم.

قبل از آنکه دومی مسئله فوق را بطور دقیق مطرح کنیم، لازم است این تعاریف را در نظر بگیریم:

## کسر ها

### ۱ - تعریف کسر و خواص آن

۱۱۹- در هندسه انواع مختلف کمیتها مانند قطعه خط و زاویه و کمان دایره و غیره را دیده و درباره هر يك از آنها تساوی و جمع را تعریف کرده ایم؛ این کمیتها را **اندازه پذیر\*** می نامند. بطور کلی هر کمیت که بتوانیم در باره آن تساوی و جمع را تعریف کنیم **اندازه پذیر** نامیده می شود.\*\*

در این کتاب هر جا از کمیت گفتگو بمیان آوریم مقصود همان کمیت اندازه پذیر خواهد بود و برای سهولت بیان در این فصل تعاریف و استدلالها را غالباً در باره **پاره خط** که یکی از کمیت های اندازه پذیر است ذکر خواهیم کرد ولی این استدلالها کلی است و می توان آنها را

#### \* Mesurable

\*\* مثل قطعه خط :

دو پاره خط **AB** و **CD** را متساوی گوئیم هرگاه بتوانیم آنها را بر یکدیگر چنان منطبق کنیم که نقطه **A** بر **C** و نقطه **B** بر **D** قرار گیرد.  
هرگاه دو پاره خط **AB** و **BC** روی يك خط راست و در دو طرف انتهای مشترکشان یعنی **B** قرار داشته باشند، قطعه خط **AC** را مجموع دو پاره خط **AB** و **BC** می نامند.

A B C

#### -۱۱۴-

۲۳- ثابت کنید اگر **a** و **b** نسبت به هم اول باشند،  $a^n + b^n$  و  $ab$  نسبت به هم اولند.

۲۴- کوچکترین عددی را پیدا کنید که دارای ۶ مقسوم علیه باشد.

۲۵- عدد  $N$  پس از تجزیه به عوامل اول به صورت  $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma$  دارای ۲۵۲

نوشته شده است. مطلوب است تعیین  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  هرگاه بدانیم  $\frac{N}{a}$  دارای ۲۵۲

مقسوم علیه است و  $N$  بترتیب ۴۵ و ۳۵ مقسوم علیه بیش از  $\frac{N}{b}$  و  $\frac{N}{c}$  دارد.

(شهریور ۱۳۳۵)

۲۶- ثابت کنید دستگاه 
$$\begin{cases} x+y=z \\ 4xy=z \end{cases}$$
 دارای جواب صحیح نیست.

(خرداد ۱۳۳۹)

۲۷- عدد سهرقمی  $N = \overline{udu}$  را آنطور بیابید که مجذور کامل و

مضرب ۱۱ باشد.

(اردیبهشت ۱۳۴۱)

در باره هر کمیت اندازه پذیر دیگر (مانند زاویه یا کمان دایره و غیره) بکار برد.

از روی تعریف تساوی و جمع، دو عمل ساده دیگر را می توان در باره هر کمیت تعریف کرد:

**الف -** حاصل ضرب پاره خط  $AB$  در عدد صحیح  $m$  عبارت است از مجموع  $m$  پاره خط مساوی با  $AB$ .

$$\begin{array}{c} C \qquad \qquad D \\ | \quad | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \quad | \\ A \quad B \end{array} \quad CD = 3AB = AB \times 3$$

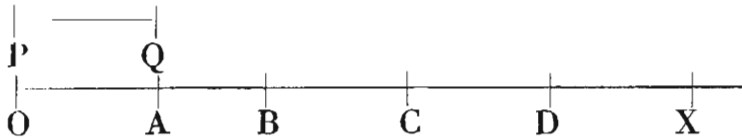
**ب -** خارج قسمت تقسیم پاره خط  $AB$  بر عدد صحیح  $m$  (مخالف با صفر) عبارت است از پاره خط دیگری که اگر آن را در  $m$  ضرب کنیم پاره خط  $AB$  بدست آید.

**۱۲۰ -** این موضوع را بدیهی فرض می کنیم که هر پاره خط را می توان به  $m$  قسمت متساوی تقسیم کرد. اگر پاره خط  $AB$  را مثلاً به ۵ جزء برابر تقسیم کرده باشیم، هر یک از قسمت های حاصل را یک پنجم  $AB$  می نامیم.

**۱۲۱ -** برای اندازه گیری هر کمیت، واحدی از جنس همان کمیت انتخاب می کنند. مثلاً برای اندازه گیری طول پاره خطها، پاره خط دلخواهی را واحد طول انتخاب کرده پاره خطهای دیگر را با آن می سنجند.

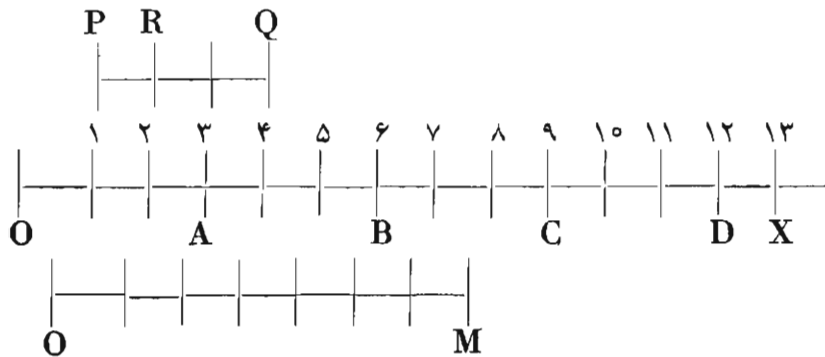
**۱۲۲ - تعریف کسر -** پاره خط دلخواه  $PQ$  را واحد انتخاب کرده روی نیم خط  $OX$  پاره خطهای  $OA$ ،  $AB$ ،  $BC$ ،  $CD$  و ... را

به توالی یکدیگر مساوی با  $PQ$  جدا می کنیم. در این صورت:



$OA$  یک برابر و  $OB$  دو برابر و  $OC$  سه برابر  $PQ$  خواهد بود و چون  $PQ$  را واحد انتخاب کرده ایم می گوییم که اندازه  $OA$  عدد ۱ و اندازه  $OB$  عدد ۲ و اندازه  $OC$  عدد ۳ و ... می باشد. برعکس به ازای هر عدد صحیحی مانند ۴، پاره خطی مانند  $OD$  روی  $OX$  پیدا می شود که اندازه اش ۴ باشد.

حال اگر واحد  $PQ$  را به چند جزء متساوی مثلاً به سه جزء تقسیم کنیم و یکی از این قسمت ها یعنی  $PR$  را که مساوی با یک سوم واحد است ابتدا از  $O$  روی نیم خط  $OX$  متوالیاً نقل کنیم، انتهای پاره خط سوم نقطه  $A$  و انتهای پاره خط ششم نقطه  $B$  و انتهای پاره خط نهم نقطه  $C$  ... خواهد بود.



اگر انتهای پاره خط هفتم را  $M$  بنامیم، پاره خط  $OM$  مساوی هفت برابر  $PR$  یعنی هفت برابر یک سوم  $PQ$  است، پس اندازه  $OM$  با

گیاك دو عدد بیان می شود یکی ۳ و یکی ۷

عدد ۳ که آن را **مخرج** می نامند، نشان می دهد که واحد را به چند جزء مساوی تقسیم کرده ایم و عدد ۷ که آن را **صورت** می خوانند، معلوم می کند که چند جزء از این جزءهای مساوی را با هم جمع کرده ایم تا OM بدست آمده است .

بنابراین وقتی که واحد طول معلوم باشد ، همانطور که يك عدد صحیح يك پاره خط را معین می کند، مجموعه دو عدد صحیح ، یعنی يك صورت و يك مخرج نیز پاره خطی را معین می کند. به این مناسبت مجموعه صورت و مخرج را نیز عددی نامیم و برای آنکه اعداد جدید را از اعداد صحیح که تاکنون مطالعه کرده ایم متمایز کنیم آنها را **عدد کسری\*** یا بطور ساده **کسر** می خوانیم .

صورت و مخرج کسر را دو جمله آن می گویند . برای نوشتن کسر مخرج آن را زیر صورتش نوشته خطی افقی مابین آنها رسم می کنیم . برای خواندن کسر ، ابتدا صورت و بعد مخرج را تلفظ کرده بر آن کلمه ام را ملحق می کنیم ، مثلاً کسری را که صورتش ۷ و مخرجش ۳ باشد ، چنین نوشته  $\frac{7}{3}$  و می خوانیم هفت سوم .

کسرهای  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{5}$  را بترتیب نصف و ثلث و ربع نیز می گویند .

**تبصره -** اگر قرار بگذاریم که تقسیم کردن واحد به يك جزء یعنی اختیار کردن خود واحد ، در این صورت هر عدد صحیح را می توان

\* اصطلاح **عدد کسری** را در مقابل **عدد صحیح** بکار خواهیم برد و بین کسر و عدد کسری تفاوتی قائل نخواهیم شد .

کسری دانست که صورتش خود آن عدد صحیح و مخرجش يك باشد . مثلاً کسر  $\frac{3}{4}$  مساوی است با عدد صحیح ۳ . با این قرارداد اعداد صحیح -تالان- خاصی از کسرها هستند .

هر عدد صحیح دلخواهی می تواند مخرج يك کسر باشد جز صفر . صورت يك کسر می تواند عدد صحیح دلخواهی باشد و کسری که صورتش صفر باشد مساوی با صفر است .

**۱۲۳- قرارداد -** همانطور که اگر قطعه خط CD مساوی AB ۳ باشد می گوئیم CD حاصل ضرب AB در عدد صحیح ۳ است (شماره ۱۱۹)، به همین طریق اگر OM مساوی با  $\frac{7}{3}$  قطعه خط PQ باشد (شماره ۱۲۲)، می گوئیم که OM عبارت است از حاصل ضرب PQ در کسر  $\frac{7}{3}$  و می نویسیم :

$$OM = \frac{7}{3}PQ = PQ \times \frac{7}{3}$$

بطور کلی ، حاصل ضرب يك کمیت در کسری مانند  $\frac{7}{3}$  بدین طریق بدست می آید که آن کمیت را به ۳ جزء برابر قسمت کرده یکی از این اجزا را در ۷ ضرب کنیم .

گاهی به جای آنکه بگوئیم کمیتی را در  $\frac{7}{3}$  ضرب کرده ایم می گوئیم  $\frac{7}{3}$  آن را اختیار کرده ایم یا  $\frac{7}{3}$  آن را گرفته ایم .

**تبصره -** اگر قطعه خط AC مساوی  $\frac{5}{8}$  قطعه خط AB باشد (شماره ۱۲۳) ، واضح است که AB مساوی  $\frac{8}{5}$  قطعه خط AC خواهد بود. به این مناسبت هر يك از دو کسر  $\frac{5}{8}$  و  $\frac{8}{5}$  را عکس دیگری نامند ( $\frac{1}{5}$  و  $\frac{1}{8}$  عکس یکدیگرند ، چرا ؟)

**تمرین ۱-** با کشیدن شکل ثابت کنید که برای بدست آوردن کسر  $\frac{2}{5}$  از قطعه خط AB به جای آنکه AB را به ۵ جزء مساوی قسمت کرده ۳ جزء

حال اگر هر يك از اين قسمت‌ها را نیز به دو جزء متساوی تقسیم کنیم، واحد  $AB$  به ۶ جزء متساوی تقسیم شده  $AM$  شامل چهار جزء از آنهاست. پس اندازه پاره خط  $AM$  این مرتبه  $\frac{4}{6}$  است. و چون در هر دو بار  $AM$  تغییر نکرده است،  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$  و قضیه ثابت است.

**نتیجه ۱-** کسرهای بیشمار می‌توان یافت که با کسر مفروضی مساوی باشند. کافی است که صورت و مخرج کسر مفروض را در هر يك از اعداد صحیح ضرب کنیم.

**نتیجه ۲-** اگر صورت و مخرج يك کسر را به یکی از مقسوم‌علیه‌های مشترکشان تقسیم کنیم، کسری مساوی با خود  $\frac{a}{b}$  بدست خواهد آمد. در واقع داریم  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$  و نظر به آنچه گذشت  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .

**۱۲۶ - مقایسه کسرها - الف -** ازدو کسر که دارای يك مخرجند، آن که صورتش بزرگتر باشد بزرگتر است (چرا؟).  
**ب -** ازدو کسر که دارای يك صورت هستند، آن که مخرجش بزرگتر باشد کوچکتر است (چرا؟).

**ج -** کسر  $\frac{a}{b}$  بزرگتر یا مساوی یا کوچکتر از کسر  $\frac{a'}{b'}$  است بنا بر آنکه مابین  $ab'$  و  $ba'$  همین روابط موجود باشد.

در واقع نظر به شماره ۱۲۵ دو کسر مفروض چنین نوشته می‌شوند:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a'b}{b'b'} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b} = \frac{ab'}{bb'}$$

چنانکه دیده می‌شود کسرهای  $\frac{a'b}{b'b'}$  و  $\frac{ab'}{bb'}$  دارای يك مخرجند،

پس برای مقایسه آنها کافی است صورتشان را با هم مقایسه کنیم.

از آنها را ایجاد کنیم، می‌توانیم  $AB$  را در ۳ ضرب کرده و قطعه خط حاصل را ۵ قسم کنیم. یکی از این قسمت‌ها اندازه کسر  $\frac{3}{5}$  با واحد  $AB$  خواهد بود (بلور کلی برای بدست آوردن کسر  $\frac{a}{b}$  از يك کمیت به جای تقسیم کردن آن بر  $b$  و ضرب کردن حاصل آن در  $a$  می‌توانیم ابتدا آن را در  $a$  ضرب و بعد حاصل را به  $b$  تقسیم کنیم).

**تمرین ۲-** از تمرین ۱ صحت تساویهای زیر را نتیجه بگیرید:

$$AB \times \frac{3}{5} = (AB \times \frac{1}{5}) \times 3 = (AB \times 3) \times \frac{1}{5}$$

**۱۲۴ - تساوی دو کسر -** دو کسر را متساوی گویند هرگاه هر دو، اندازه يك قطعه خط (يك کمیت) بر حسب يك واحد باشند.

اگر دو کسر متساوی نباشند، هر کدام که اندازه قطعه خط بزرگتری باشد از دیگری بزرگتر است.

**۱۲۵ - قضیه اصلی -** اگر صورت و مخرج کسر  $\frac{a}{b}$  را در يك عدد ضرب کنیم کسری مساوی با خود  $\frac{a}{b}$  بدست خواهد آمد.

**برهان -** کسر  $\frac{2}{3}$  را در نظر گرفته صورت و مخرج آن را در ۲ ضرب می‌کنیم تا  $\frac{4}{6}$  حاصل شود. می‌خواهیم ثابت کنیم که  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ . برای این کار پاره خط  $AB$  را واحد طول فرض کرده آن را به ۳ قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم و دو قسمت از آن را اختیار می‌کنیم. به این ترتیب اندازه پاره خط  $AM$  مساوی با کسر  $\frac{2}{3}$  است.



\* برای مقایسه دو پاره خط آنها را روی یکدیگر چنان قرار می‌دهند که دريك سر مشترك باشند. اگر دو پاره خط متساوی نباشند یکی از آنها مجموع پاره خط دوم و يك پاره خط دیگر است. در این صورت اولی از دومی بزرگتر است.

**فرع -** برای آنکه کسر  $\frac{a}{b}$  مساوی عدد صحیح  $n$  باشد، باید داشته باشیم  $\frac{a}{b} = \frac{n}{1}$  یا  $a = bn$ . یعنی برای آنکه کسری مساوی عدد صحیح باشد، باید صورت آن بر مخرجش قابل قسمت باشد.

## ۲- ساده کردن کسرها

**۱۲۷ - قضیه -** اگر داشته باشیم  $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$  و  $a < a'$ ، خواهیم داشت  $b < b'$ . زیرا اگر دو کسر متساوی باشند، داریم  $ab' = ba'$  (شماره ۱۲۶) و چون  $a < a'$ ، تساوی  $ab' = ba'$  فقط در صورتی امکان پذیر است که  $b$  کوچکتر از  $b'$  باشد.

**۱۲۸ - تعریف -** ساده کردن کسری یعنی تبدیل آن به کسر دیگری که با آن مساوی و صورت و مخرجش بترتیب از صورت و مخرج کسر اول کوچکتر باشند (شماره ۱۲۷)، در این صورت می گویند که کسر دوم از کسر اول ساده تر است. اگر يك کسر را نتوان به کسر ساده تری تبدیل کرد، می گویند که این کسر به **ساده ترین صورت** خود در آمده یا **تحویل ناپذیر** است.

هرگاه دو جمله يك کسر مضربهای يك عدد باشند، برای ساده کردن آن کسر کافی است که صورت و مخرج آن را بر آن عدد تقسیم کنیم (شماره ۱۲۵). اما اگر دو جمله يك کسر نسبت به هم اول باشند، دیگر به این طریق نمی توان آن را ساده کرد و ممکن است تصور کنیم که به طریق دیگری ساده کردن این کسر امکان پذیر است. قضایای زیر این شك را

مرتفع می کنند.

**۱۲۹ - قضیه -** اگر صورت و مخرج يك کسر نسبت به هم اول باشند، هر کسر دیگری که با آن مساوی باشد صورتش مضربی از صورت کسر اول و مخرجش همان مضرب از مخرج کسر اول است.

**برهان -** فرض کنیم  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح باشند. چون مثلاً ۳ و ۴ نسبت به هم اولند، می خواهیم ثابت کنیم اگر  $\frac{a}{b} = \frac{۳}{۴}$ ،  $a$  و  $b$  يك مضرب از ۳ و ۴ است، یعنی:  $a = ۳ \times m$  و  $b = ۴ \times m$ .

برای این کار صورت و مخرج کسر  $\frac{۳}{۴}$  را در  $b$  و صورت و مخرج کسر  $\frac{a}{b}$  را در ۴ ضرب می کنیم. دو کسر حاصل بترتیب با دو کسر  $\frac{۳}{۴}$  و  $\frac{a}{b}$  برابرند (شماره ۱۲۵) و داریم  $\frac{۳b}{۴b} = \frac{۳a}{۴b}$  و چون این دو کسر دارای يك مخرج و با هم مساویند، صورت های آنها با هم مساویند، یعنی داریم  $۳b = ۴a$  (۱) حال می گوئیم که عدد ۳ با عدد ۴ اول است و  $۴a$  را می شمرد، پس ناچار ۳، عدد  $a$  را می شمرد (شماره ۱۲۵) و داریم  $a = ۳m$ ، و چون این مقدار  $a$  را در رابطه (۱) قرار دهیم، حاصل می شود:  $۴ \times ۳m = ۳b$  و از آنجا  $b = ۴m$ . بنابراین  $a$  مضربی است از عدد ۳ و  $b$  همان مضرب است از عدد ۴ و قضیه ثابت است.

**۱۳۰ - قضیه -** برای آنکه يك کسر تحویل ناپذیر باشد، لازم و کافی است که صورت و مخرج آن نسبت به هم اول باشند.

**برهان -** اولاً شرط لازم است زیرا اگر کسر تحویل ناپذیر باشد، ناچار باید صورت و مخرجش نسبت به هم اول باشند و گرنه می توان صورت و مخرج آن را بريك عدد تقسیم و کسر را ساده تر کرد و این خلاف فرض

است. ، ثانیا شرط کافی است زیرا اگر دو جمله کسر  $\frac{a}{b}$  نسبت به هم اول باشند ، نظر به قضیه شماره ۱۲۹ هر کسر دیگری که با آن مساوی باشد ، صورت و مخرجش يك مضرب از صورت و مخرج آن خواهد بود یعنی به صورت  $\frac{am}{bm}$  می باشد و واضح است که کوچکترین مقداری که می توان به  $m$  نسبت داد واحد است . پس کسر  $\frac{a}{b}$  از تمام کسرهای مساوی با خود ساده تر است .

**نتیجه - ۱۴۱ -** اگر دو کسر تحویل ناپذیر با هم مساوی باشند، صورتها با هم مساویند .

**تبصره -** فقط يك کسر تحویل ناپذیر وجود دارد که با کسر مفروضی مساوی باشد .

**۱۳۱ - قاعده -** نظر به آنچه گذشت برای آنکه کسری را به ساده ترین صورت خود تحویل کنیم کافی است که صورت و مخرج آن را بر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان تقسیم کنیم . در عمل ابتدا صورت و مخرج کسر را به مقسوم علیه های مشترکی که بسهولت می توان آنها را پیدا کرد تقسیم می کنند (استفاده از قابلیت تقسیم بر اعداد ، حالتی که صورت و مخرج کسر حاصل ضرب چند عامل باشند ) و بعد بزرگترین مقسوم علیه مشترك صورت و مخرج را بدست می آورند .

**مثال -** برای ساده کردن کسر  $\frac{2 \times 13 \times 21}{35 \times 4}$  بدون آنکه اعمال ضرب را بجا آوریم صورت و مخرج را بر  $2 \times 7$  تقسیم می کنیم حاصل می شود:

$$\frac{13 \times 3}{2 \times 5} = \frac{39}{10}$$

### ۳ - تحویل چند کسر به يك مخرج

**۱۳۲ -** مقصود از تحویل چند کسر به يك مخرج آن است که چند کسر مفروض را به کسرهای معادل آنها چنان تبدیل کنیم که مخرجهای کسرهای اخیر متساوی باشند .

اگر بخواهیم کسرهای  $\frac{a}{b}$  ،  $\frac{a'}{b'}$  و  $\frac{a''}{b''}$  را به يك مخرج تحویل کنیم يك طریقه این است که صورت و مخرج هر يك از این کسرها را در حاصل ضرب مخرجهای دو کسر دیگر ضرب کنیم . به این ترتیب کسرهایی، همه با يك مخرج ، مساوی با کسرهای مفروض بدست می آیند.

$$\frac{a}{b} = \frac{ab'b''}{bb'b''} \quad \text{و} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a'bb''}{b'bb''} \quad \text{و} \quad \frac{a''}{b''} = \frac{a''bb'}{b''bb'}$$

**۱۳۳ -** تحویل چند کسر به کوچکترین مخرج مشترك - بطور کلی هرگاه کسرهای  $\frac{a}{b}$  ،  $\frac{a'}{b'}$  و  $\frac{a''}{b''}$  را در نظر گرفته فرض کنیم که  $m$  یکی از مضربهای مشترك مخرجهای  $b$  ،  $b'$  و  $b''$  باشد، داریم :

$$m = bq = b'q' = b''q''$$

حال اگر صورت و مخرج کسرهای مفروض را بترتیب در  $q$  ،  $q'$  و  $q''$  ضرب کنیم ، کسرهای  $\frac{aq}{m}$  ،  $\frac{a'q'}{m}$  و  $\frac{a''q''}{m}$  حاصل می شوند که معادل با کسرهای مفروض بوده دارای مخرج مشتركند . بنا بر این به ازای هر يك از مضربهای مشترك مخرجها می توان سه کسر تعیین کرد که با کسرهای مفروض معادل و دارای يك مخرج باشند . ولی البته ساده ترین راه آن است که مابین مخرجها کوچکترین مضرب مشترك تعیین کرده

آن را مخرج مشترك قرار دهیم . از آنجا قاعده زیر نتیجه می شود :

**قاعده -** برای تحویل چند کسر به کوچکترین مخرج مشترك ، ابتدا کسره های مفروض را به ساده ترین صورت خود تبدیل کرده کوچکترین مضرب مشترك مخرجها را بدست می آوریم . سپس این کوچکترین مضرب مشترك را مخرج مشترك قرار داده برای تعیین صورتهای مخرج مشترك را برهريك از مخرجهای سابق تقسیم می کنیم و خارج قسمت را در صورت همان کسر ضرب می کنیم .

**مثال -** برای آنکه کسره های  $\frac{4}{5}$  ،  $\frac{9}{12}$  و  $\frac{14}{24}$  را به کوچکترین مخرج مشترك تحویل کنیم ، ابتدا آنها را به ساده ترین صورتهای تبدیل می کنیم که می شود  $\frac{4}{5}$  ،  $\frac{3}{4}$  و  $\frac{7}{12}$  . سپس این کسرها را مطابق قاعده فوق به کوچکترین مخرج تحویل می کنیم ، حاصل می شود :

$$\frac{4 \times 12}{5 \times 12} = \frac{48}{60} \quad \text{و} \quad \frac{3 \times 15}{4 \times 15} = \frac{45}{60} \quad \text{و} \quad \frac{7 \times 5}{12 \times 5} = \frac{35}{60}$$

### مسائل

۱ - هر يك از کسره های زیر را به ساده ترین صورت خود تبدیل کنید :

$$\frac{60}{252} \quad (\text{جواب : } \frac{5}{21}) \quad \text{و} \quad \frac{260}{504} \quad (\text{جواب : } \frac{5}{7}) \quad \text{و} \quad \frac{46872}{165564} \quad (\text{جواب : } \frac{62}{219})$$

۲ - کسری معادل  $\frac{2415}{2898}$  تعیین کنید که تفاضل دو جمله آن ۷۲۹۴۶ باشد .

$$(\text{جواب : } \frac{364730}{437676})$$

۳ - تمام کسرهایی را تعیین کنید که از کسر  $\frac{18}{99}$  ساده تر و با آن برابرند .

$$(\text{جواب : } \frac{2}{7} \quad \text{و} \quad \frac{4}{14} \quad \text{و} \quad \frac{6}{21} \quad \text{و} \quad \frac{8}{28} \quad \text{و} \quad \dots \quad \text{و} \quad \frac{16}{56})$$

۴ - مطلوب است تعیین کسری معادل با  $\frac{15}{11}$  که مجموع دو جمله اش ۱۳۲ باشد .

$$(\text{جواب : } \frac{55}{11})$$

۵ - مطلوب است تعیین کسری معادل با  $\frac{188887}{211109}$  که مجموع دو جمله اش

$$(\text{جواب : } \frac{51}{57})$$

۱۰۸ باشد .

۶ - کسری معادل کسر  $\frac{91}{143}$  تعیین کنید که مخرجش ۱۱۰ باشد .

$$(\text{جواب : } \frac{70}{110})$$

۷ - کسری معادل با کسر  $\frac{15}{40}$  تعیین کنید که صورتش ۲۱ باشد .

$$(\text{جواب : } \frac{21}{28})$$

۸ - کسر تحویل ناپذیری معین کنید که اگر ۱۴ به صورت و ۳۵ به مخرج

آن اضافه کنید تغییر نکند .

$$(\text{جواب : } \frac{2}{5})$$

۹ - کسری معادل با کسر  $\frac{16}{77}$  معین کنید که بزرگترین مقسوم علیه مشترك

دو جمله آن مساوی با ۱۳ باشد .

$$(\text{جواب : } \frac{26}{117})$$

۱۰ - مطلوب است تعیین تمام کسرهایی که صورتهای آن از ۲۰۰ کوچکتر و

مخرجشان از ۳۰۰ بزرگتر بوده معادل با  $\frac{57}{133}$  باشد .

$$(\text{جواب : } \frac{3m}{7m} \text{ که در آن } 42 < m \leq 66)$$

۱۱ - چه اعداد صحیحی می توان به صورت و به مخرج کسر  $\frac{a}{b}$  افزود که

مقدار این کسر تغییر نکند؟

$$(\text{جواب : دو جمله کسری که با } \frac{a}{b} \text{ معادل باشد})$$

۱۲ - با استفاده از مسئله قبل تعیین کنید که اگر به مخرج کسر  $\frac{15}{25}$  عدد ۱

را اضافه کنیم ، چه عددی باید به صورت آن اضافه کنیم تا مقدار کسر تغییر نکند؟

$$(\text{جواب : } 6)$$

۱۳ - ثابت کنید که اگر  $ab' - a'b = 1$  باشد ، هر يك از کسره های

$$\frac{a}{b} \quad \text{و} \quad \frac{a'}{b'} \quad \text{و} \quad \frac{a+a'}{b+b'} \quad \text{و} \quad \frac{a+a'}{a}$$

۱۴ - ثابت کنید که کسره های  $\frac{23}{99}$  و  $\frac{2322}{9999}$  و  $\frac{232223}{999999}$  متعادند .

۱۵ - کسری تعیین کنید که مجموع دو جمله آن ۱۲ بوده اگر ۳ واحد

به صورت و ۵ واحد به مخرج آن اضافه کنیم کسر جدید معادل با  $\frac{2}{3}$  باشد .

$$(\text{جواب : } \frac{5}{7})$$

۱۶ - ثابت کنید که هرگاه به صورت و مخرج کسری يك عدد اضافه کنیم ،

اگر کسر کوچکتر از واحد باشد ، مقدار آن زیاد می شود و اگر کسر مساوی با واحد

باشد، مقدار آن تغییر نمی‌کند و بالاخره اگر کسر بزرگتر از واحد باشد، مقدارش کم می‌شود. به عبارت دیگر، در هر حال کسر به واحد نزدیکتر می‌شود.  
۱۷ - هر يك از کسرهای زیر را ساده کرده آنها را با یکدیگر مقایسه کنید:

$$\frac{24}{27} \text{ و } \frac{42}{144} \text{ و } \frac{12}{32} \text{ و } \frac{35}{84} \text{ و } \frac{12}{32} \text{ و } \frac{42}{144} \text{ و } \frac{24}{27} \text{ و } \frac{35}{84} \text{ (جواب: } \frac{24}{27} < \frac{12}{32} < \frac{35}{84} < \frac{42}{144} \text{)}$$

۱۸ - ثابت کنید که اگر اعداد  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول باشند، کسرهای

$$\frac{a+b}{ab} \text{ و } \frac{a-b}{ab}$$

تحویل ناپذیرند.

۱۹ - به ازای چه مقدار از  $a$  کسر  $y = \frac{6a-13}{5a-17}$  بزرگترین مقدار

خود را اختیار می‌کند. (جواب:  $a=4$ )

۲۰ - اگر  $n$  عدد صحیح باشد، به ازای چه مقدار از  $n$  کسر  $\frac{n+8}{2n-5}$  اولاً

معادل يك عدد صحیح است. ثانیاً تحویل ناپذیر است. ثالثاً اگر کسر تحویل ناپذیر باشد، مقسوم علیه‌های مشترك دو جمله آن چه اعدادی می‌توانند باشند.

۲۱ - در تساوی  $\frac{(a-b)^2}{ab} = \frac{9}{70}$  به فرض اینکه  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول

باشند، اولاً ثابت کنید که کسر  $\frac{(a-b)^2}{ab}$  تحویل ناپذیر است. ثانیاً مقدار عددی

$a$  و  $b$  را حساب کنید. (امتحان سال ششم ریاضی شهریور ۱۳۲۸)

#### ۴ - اعمال راجع به کسر

چون مفهوم اعمال چهارگانه جمع و تفریق و ضرب و تقسیم را در بخش اول بتفصیل شرح داده‌ایم، در اینجا به ذکر تعریف و قاعده هر يك از این اعمال درباره کسرها اکتفا می‌کنیم.

۱۲۴ - جمع - مجموع چند عدد صحیح یا کسری عبارت است از عددی (صحیح یا کسری) که بتنهایی شامل تمام آحاد و اجزای آحادی باشد که در اعداد مفروض موجود است.

از این تعریف تمام خواصی که در شماره ۱۴ برای مجموع چند عدد صحیح ذکر کردیم در باره اعداد کسری نیز بدست می‌آید.

۱۳۵ - همانطور که مجموع (۵ واحد + ۷ واحد + ۳ واحد) می‌شود ۱۵ واحد، مجموع ۵ هشتم بعلاوه ۷ هشتم بعلاوه ۳ هشتم نیز می‌شود ۱۵ هشتم و از آنجا قاعده زیر برای جمع کردن چند کسر بدست می‌آید.

قاعده - مجموع چند کسر که مخرجشان مشترك باشد، کسری است که مخرجش همان مخرج مشترك کسره‌ای مفروض و صورتش مجموع صورتهای آنها باشد:

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{8} + \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$$

برای جمع کردن چند کسر که در مخرج، مشترك نباشند ابتدا آنها

را به يك مخرج تحويل کرده سپس کسره‌های حاصل را مطابق قاعده فوق جمع می‌کنیم .

واضح است که برای جمع کردن چند عدد کسری می‌توان قسمتهای صحیح را با هم و قسمتهای کسری را نیز با هم جمع کرد و حاصلها را برهم افزود :

$$6\frac{5}{8} + 2\frac{3}{4} + 5\frac{1}{2} = 6 + 2 + 5 + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 13 + \frac{15}{8} = 13\frac{15}{8}$$

**۱۳۶ - تفریق -** تفریق کردن يك عدد صحیح یا کسری از عدد

صحیح یا کسری دیگری که از آن بزرگتر باشد ، عبارت از این است که از عدد دوم تمام آحاد و اجزای آحاد عدد اولی را کم کنیم . این حاصل را تفاضل دو عدد مفروض می‌نامند .

**قاعده -** تفاضل دو کسر متحدالمخرج کسری است که صورتش تفاضل صورتها و مخرجش همان مخرج مشترك کسره‌های مفروض باشد. اگر مخرجهای کسره‌های مفروض مشترك نباشند ابتدا باید آنها را به يك مخرج تحويل کرد و عمل تفریق را در کسره‌های حاصل انجام داد :

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{7-2}{8} = \frac{5}{8}$$

برای تفریق کردن اعداد کسری قسمت صحیح مفروق را از قسمت صحیح مفروق منه و قسمت کسری مفروق را از قسمت کسری مفروق منه کم کرده حاصلها را به هم می‌افزایند :

$$9\frac{7}{8} - 3\frac{2}{8} = 6\frac{5}{8}$$

اگر قسمت کسری مفروق منه از قسمت کسری مفروق کوچکتر باشد، يك واحد از قسمت صحیح مفروق منه را با قسمت کسری آن تجنیس کرده عمل تفریق را مانند فوق انجام می‌دهند .

$$9\frac{9}{12} - 5\frac{11}{12} = 8\frac{21}{12} - 5\frac{11}{12} = 3\frac{10}{12}$$

**۱۳۷ - ضرب کسر در يك عدد صحیح - تعریف -** حاصل ضرب

کسر  $\frac{a}{b}$  در عدد صحیح  $n$  عبارت است از مجموع  $n$  کسر مساوی با  $\frac{a}{b}$

$$\frac{a}{b} \times n = \underbrace{\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b}\right)}_{n \text{ مرتبه}} = \frac{a \times n}{b}$$

**قاعده -** برای ضرب کردن کسر در يك عدد صحیح صورت کسر را در آن عدد ضرب می‌کنند یا اگر ممکن باشد مخرج کسر را بر آن عدد تقسیم می‌کنند .

$$\frac{5}{6} \times 3 = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = \frac{5 \times 3}{6}$$

یا چون دو جمله کسر  $\frac{5 \times 2}{6}$  را به ۳ کوچک کنیم  $\frac{5}{6} \times 3 = \frac{5}{2}$

**نتیجه -** حاصل ضرب هر کسر در عدد مخرج کسر مساوی است با صورت آن کسر :

$$\frac{3}{4} \times 4 = \frac{3 \times 4}{4} = \frac{3}{1} = 3$$

**۱۳۸ - تعریف -** خارج قسمت کامل تقسیم عدد  $a$  بر عدد  $b$  عددی است صحیح یا کسری که چون آن را در  $b$  ضرب کنیم عدد  $a$  حاصل شود.

چون مطابق شماره ۱۳۷ حاصل ضرب کسر  $\frac{a}{b}$  در عدد  $b$  مساوی است با  $a$  ، قضیه زیر بدست می‌آید :

**قضیه -** هر کسر را می‌توان خارج قسمت کامل صورت آن بر مخرجش دانست .

با استفاده از این معنی دیگر که برای کلمه کسر بدست آوردیم ، می‌توان خارج قسمت کامل هر عدد صحیح را بر عدد دیگر نوشت و حساب کرد.

$$14:3 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

**تبصره مهم -** اگر خارج قسمت تقسیم عدد  $a$  را بر عدد  $b$

عدد  $q$  و باقیمانده آن را  $r$  بنامیم (شماره ۵۱)، داریم  $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$  و  $\frac{r}{b}$  یا صفر است یا از يك كوچكتر.

مطابق تعریف شماره ۱۳۸ اگر  $r$  صفر باشد،  $q$  مساوی است با خارج قسمت کامل تقسیم  $a$  بر  $b$ . اما اگر  $r$  صفر نباشد، خارج قسمت کامل تقسیم  $a$  بر  $b$  عبارت است از  $q + \frac{r}{b}$  و فقط قسمتی از این خارج قسمت کامل است و تفاوت آنها عبارت است از  $\frac{r}{b}$  که حتماً از يك كوچكتر است. به این مناسبت است که  $q + \frac{r}{b}$  را خارج قسمت کامل و  $q$  را خارج قسمت تقریبی  $a$  بر  $b$  (تقریب نقصانی) تا کمتر از يك واحد می نامند.

**۱۳۹ - تقسیم کسر بر يك عدد صحیح - مقصود از تقسیم کسر  $\frac{a}{b}$  بر عدد صحیح  $n$  بدست آوردن کسری است که چون آن را در  $n$  ضرب کنیم حاصل مساوی با  $\frac{a}{b}$  شود.**

**قاعده -** برای بدست آوردن خارج قسمت تقسیم کسر بر يك عدد صحیح، کافی است که کسری تشکیل دهیم که صورتش همان صورت کسر مفروض و مخرجش حاصل ضرب مخرج کسر در عدد صحیح مفروض باشد.

**مثلاً:**  $\frac{7}{15} : 6 = \frac{7}{15 \times 6}$  زیرا اگر  $\frac{7}{15 \times 6}$  را در ۶ ضرب کنیم  $\frac{7}{15}$  حاصل می شود.

واضح است که اگر صورت کسر بر عدد صحیح مفروض قابل قسمت باشد، می توانیم به جای آنکه مخرج کسر را در عدد صحیح مفروض ضرب کنیم، صورت آن را بر عدد صحیح تقسیم کنیم.

$$\frac{12}{25} : 3 = \frac{12}{25 \times 3} = \frac{12 : 3}{25}$$

**۱۴۰ - تعریف -** به جای آنکه بگوییم کسر  $\frac{a}{b}$  را بر  $m$  تقسیم کرده ایم، می توان گفت  $\frac{1}{m}$  کسر  $\frac{a}{b}$  را اختیار کرده ایم.

**۱۴۱ - حاصل ضرب دو کسر -** مقصود از ضرب کردن عدد صحیح یا کسری  $A$  در کسر  $\frac{a}{b}$  تکرار  $a$  مرتبه  $\frac{1}{b}$  عدد  $A$  می باشد و نتیجه این عمل را حاصل ضرب عدد صحیح یا کسری  $A$  در کسر  $\frac{a}{b}$  می نامند.

**۱۴۲ - قاعده -** برای تعیین حاصل ضرب يك کسر در کسر دیگر، کسری تشکیل می دهیم که صورتش حاصل ضرب صورتها و مخرجش حاصل ضرب مخرجهای دو کسر مفروض باشد.

زیرا برای ضرب کردن کسر  $\frac{c}{d}$  در کسر  $\frac{a}{b}$  باید ابتدا  $\frac{1}{b}$  کسر  $\frac{c}{d}$  را بدست آوریم که می شود  $\frac{c}{b \times d}$  و بعد آن را  $a$  مرتبه تکرار کنیم که به این ترتیب  $\frac{ac}{bd}$  حاصل می شود.

**تبصره ۱ -** برای ضرب کردن دو عدد کسری در یکدیگر ابتدا باید آنها را تجنیس کرد.

**تبصره ۲ -** ضرب کردن کسر  $\frac{a}{b}$  در کسر  $\frac{2}{3}$  منجر به این می شود که  $\frac{a}{b}$  را بر ۳ تقسیم کرده حاصل را در ۲ ضرب کنیم. به همین دلیل است که وقتی يك عدد صحیح یا کسری را مثلاً در  $\frac{2}{3}$  ضرب می کنیم می گوییم که  $\frac{2}{3}$  آن را اختیار کرده ایم (۲ مرتبه  $\frac{1}{3}$  کسر  $\frac{a}{b}$ ).

**۱۴۳ -** چون می توان هر عدد صحیح را کسری دانست که مخرجش واحد باشد، حاصل ضرب يك عدد صحیح در يك کسر مطابق قاعده فوق بدست می آید:

$$\frac{5}{7} \times 4 = \frac{5}{7} \times \frac{4}{1} = \frac{5 \times 4}{7}$$

**۱۴۴ - تعریف -** حاصل ضرب چند کسر که به ترتیب معینی نوشته

شده باشند کسری است که چنین بدست می آید که کسر اول را در کسر دوم و حاصل را در کسر سوم ضرب کنیم و عمل را تا آخرین کسر ادامه دهیم .

**۱۳۵- قضیه -** حاصل ضرب چند کسر به ترتیب عوامل بستگی ندارد .

**برهان -** چون حاصل ضرب چند عامل صحیح به ترتیب عوامل بستگی ندارد ، می توان در حاصل ضرب چند کسر جای عاملهای صورت یا مخرج را بطور دلخواه تغییر داد و آن را حاصل ضرب کسرهای مفروض که به ترتیب دیگری نوشته شده باشند دانست .

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{11} = \frac{2 \times 5 \times 2}{3 \times 7 \times 11} = \frac{5 \times 2 \times 2}{7 \times 3 \times 11} = \frac{5}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{11}$$

**۱۳۶- قوه -** قوه  $m$ ام کسر  $\frac{a}{b}$  عبارت است از حاصل ضرب  $m$  کسر مساوی با  $\frac{a}{b}$  و لذا مساوی است با  $\frac{a^m}{b^m}$  .

**۱۳۷- قضیه -** قوه  $m$ ام يك کسر تحویل ناپذیر کسری است تحویل ناپذیر . زیرا اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند ، دو قوه دلخواه آنها نیز نسبت به هم اول هستند (شماره ۱۱۰) .

**۱۳۸- تقسیم کسر بر کسر -** مقصود از تقسیم کسر  $\frac{a}{b}$  بر کسر  $\frac{c}{d}$  یافتن کسری است به نام خارج قسمت که چون آن را در کسر مقسوم علیه ضرب کنیم کسر مقسوم حاصل شود . این خارج قسمت کامل است نه تقریبی (به شماره ۱۳۸ مراجعه کنید) .

**قاعده -** برای تقسیم يك کسر بر کسر دیگر کافی است که کسر مقسوم را در معکوس مقسوم علیه ضرب کنیم (معکوس هر کسر کسری است که صورت و مخرجش

بترتیب مخرج و صورت کسر مفروض باشند) .

مثلا خارج قسمت کامل تقسیم کسر  $\frac{a}{b}$  بر کسر  $\frac{c}{d}$  عبارت است از  $\frac{ad}{bc}$  زیرا  $\frac{ad}{bc} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$  .

**تبصره ۱ -** عکس هر عدد صحیح خارج قسمت کامل واحد است بر آن عدد . مثلا عکس ۴ عبارت است از  $\frac{1}{4}$  .

**تبصره ۲ -** در تقسیم کسرها اگر مقسوم یا مقسوم علیه یا هر دو عدد کسری باشند ابتدا باید عدد کسری را تجنيس کرد .

$$8\frac{4}{5} : 7\frac{2}{4} = \frac{44}{5} : \frac{31}{4} = \frac{44}{5} \times \frac{4}{31} = 1\frac{21}{155}$$

**تبصره ۳ -** گاهی خارج قسمت کامل تقسیم کسر  $\frac{a}{b}$  را بر کسر  $\frac{c}{d}$  با علامت  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$  نشان می دهند و آن را نسبت کسر  $\frac{a}{b}$  به کسر  $\frac{c}{d}$  نیز می خوانند (شماره ۱۸۴) .

## مسائل

۱- چه کسری از  $\frac{7}{9}$  باید اختیار کرد تا کسر  $\frac{2}{5}$  بدست آید ؟

(جواب :  $\frac{18}{35}$ )

۲- در چه صورت حاصل ضرب دو کسر تحویل ناپذیر کسری است تحویل ناپذیر؟ (جواب : در صورتی که صورت هریک از دو کسر با مخرج دیگری نسبت به هم اول باشند) .

۳- از کسر  $\frac{275}{289}$  مقدار  $\frac{7}{24}$  آن را کم کنید . (جواب :  $\frac{275}{408}$ )

۴- یکی از دو عامل يك عمل ضرب را در  $\frac{1}{4}$  ضرب و دیگری را بر  $\frac{1}{7}$

تقسیم کرده ایم . حاصل ضرب اعداد حاصل مساوی با ۲۴۱۵ شده است؛ مطلوب است تعیین حاصل ضرب دو عامل اولیه . (جواب : ۱۳۸۵)

۵ - مطلوب است تعیین دو عدد که مجموع آنها ۱۳۵۰ و  $\frac{2}{11}$  اولی مساوی با  $\frac{1}{8}$  دومی باشد . (جواب : ۵۵۰ و ۸۰۰)

۶ - مطلوب است تعیین دو کسر که تفاضل آنها  $\frac{11}{24}$  و خارج قسمت کامل یکی بر دیگری  $2\frac{4}{7}$  باشد . (جواب :  $\frac{18}{24}$  و  $\frac{7}{24}$ )

۷ - ثابت کنید که يك عدد صحيح نمی تواند مربع يك عددكسری باشد .

۸ - درچه صورت خارج قسمت کامل دو کسر تحویل ناپذیر ممکن است

يك عدد صحيح باشد ؟

۹ - مطلوب است تعیین کوچکترین عدد صحیحی که چون آن را بر کسر

$\frac{91}{156}$  تقسیم کنیم ، خارج قسمت کامل آن يك عدد صحيح باشد . (جواب : ۷)

۱۰ - مطلوب است تعیین کوچکترین عدد صحیحی که چون آن را بر

هر يك از کسرهائی  $\frac{9}{15}$  و  $\frac{9}{35}$  و  $\frac{6}{25}$  تقسیم کنیم خارج قسمتهای کامل این تقسیمها اعداد صحيح باشند . (جواب : ۱۸)

۱۱ - شخصی دو قطعه زمین را به مبلغ ۲۹۹۸۸ ریال خریده است .

مطلوب است تعیین قیمت هر يك از دو زمین در صورتی که  $\frac{2}{5}$  قیمت یکی از آنها مساوی  $\frac{4}{7}$  قیمت دیگری باشد . (جواب : ۱۲۳۴۸ و ۱۷۶۴۰ ریال)

۱۲ - مطلوب است تعیین مجموع :  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$  (جواب :  $\frac{n}{n+1}$ )

۱۳ - مطلوب است تعیین مجموع :  $\frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$  (جواب :  $\frac{n}{2(2n+3)}$ )

۱۴ - مطلوب است تعیین مجموع :

$$\frac{1}{11 \times 16} + \frac{1}{16 \times 21} + \dots + \frac{1}{(5n+6)(5n+11)}$$

(جواب :  $\frac{n}{11(5n+11)}$ )

۱۵ - مطلوب است تعیین مجموع :

$$\frac{1}{9 \times 11} + \frac{1}{11 \times 13} + \dots + \frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$$

(جواب :  $\frac{n}{9(2n+9)}$ )

۱۶ - مطلوب است تعیین مجموع :

$$\frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$$

(جواب :  $\frac{n}{5(3n+5)}$ )

۱۷ - مطلوب است تعیین مجموع :

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

(جواب :  $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ )

۱۸ - اولاً مطلوب است تعیین دو عدد صحيح که مجموع معکوسهای

آنها مساوی واحد باشد . ثانیاً مطلوب است تعیین سه عدد صحيح که مجموع معکوسهای آنها مساوی واحد باشد.

۱۹ - سه عدد صحيح چنان تعیین کنید که مجموع آنها مساوی با حاصل

ضرب آنها باشد . (جواب : ۳ و ۲ و ۱)

۲۰ - سه کسر معادل  $\frac{3}{4}$  و  $\frac{5}{7}$  و  $\frac{9}{13}$  پیدا کنید که مخرج هر کدام نصف

صورت بعدی باشد .

۲۱- دو کسر تحویل ناپذیر  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{c}{d}$  طوری تعیین کنید که تفاضلشان برابر  $\frac{5}{6}$  و بزرگترین مقسوم علیه مشترك صورتهای آنها مساوی تفاضل دو صورت یعنی  $a - c$  و کوچکترین مضرب مشترك صورتهای برابر ۱۰۵۰ باشد. (خرداد ۱۳۳۹)

۲۲- بین تمام کسره‌های معادل با کسر  $\frac{9}{33}$  دو کسر  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{c}{d}$  را آنطور پیدا کنید که مجموع صورتهای آن دو، برابر ۶۳ باشد. عدد جوابهای هر يك از دو کسر مزبور را پیدا کنید. (شهریور ۱۳۳۹)

### ۵- کسر اعشاری، اعداد اعشاری

۱۴۹- تعریف- هر کسر را که مخرجش یکی از قوای ۱۰ باشد، کسر اعشاری می‌نامند، مانند  $\frac{2}{10}$  و  $\frac{273}{100}$  و در غیر این صورت، کسر را متعارفی می‌خوانند.

۱۵۰- هر کسر اعشاری را می‌توان به صورت مجموع يك عدد صحيح (که ممکن است صفر نیز باشد) و کسره‌های اعشاری کوچکتر از واحدی که صورت آنها کمتر از ۱۰ باشد نوشت. مثال:

$$\frac{1736}{100} = \frac{1700 + 30 + 6}{100} = \frac{1700}{100} + \frac{30}{100} + \frac{6}{100} = 17 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100}$$

۱۵۱- تعریف- کسره‌های  $\frac{1}{10}$  و  $\frac{1}{100}$  و غیره را بترتیب واحدهای اعشاری مرتبه اول و دوم و سوم... می‌نامند. چنانکه می‌بینید واحد هر مرتبه اعشاری ۱۰ برابر واحد اعشاری مرتبه زیر دست آن است. به این ترتیب می‌توان کسر  $\frac{1736}{100}$  را به صورت  $17/36$  نوشت، با این قرارداد که اولاً هر رقم که در سمت راست رقم دیگر نوشته شود، شماره آحاد (صحيح يا اعشاری) يك مرتبه پایین‌تر را می‌رساند و ثانیاً ممیز (/) قسمت صحيح را از قسمت اعشاری جدا می‌کند و ثالثاً هرگاه واحد صحيح يا اعشاری مرتبه‌ای ناقص باشد، به جای آن صفر قرار می‌دهند (مثلاً کسر اعشاری  $\frac{29}{10000}$  چنین نوشته می‌شود ۰/۰۰۲۹).

۱۵۲ - تعریف - هر کسر اعشاری که با قراردادهای فوق نوشته

شود ، به عدد اعشاری موسوم است ، مانند  $۱۷/۳۶$  .

تبصره - اولاً اگر در سمت راست يك عدد اعشاری يك یا چند صفر اضافه کنیم ، یا اگر در سمت راست آن يك یا چند صفر باشد و آنها را حذف کنیم ، مقدار آن عدد تغییر نمی کند (چرا؟) مثلاً :

$$۲/۱۵ = ۲/۱۵۰ = ۲/۱۵۰۰۰$$

ثانیاً اگر در يك عدد اعشاری ممیز را ۱ یا ۲ یا ۳ یا ... مرتبه به سمت راست ببریم عدد بترتیب در ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ یا ... ضرب می شود (چرا؟) مثال :  $۷/۴۳۵ \times ۱۰ = ۷۴/۳۵$  .

ثالثاً اگر در يك عدد اعشاری ممیز را ۱ یا ۲ یا ۳ یا ... مرتبه به سمت چپ ببریم عدد بترتیب بر ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ یا ... تقسیم می شود (چرا؟) مثال :  $۱/۷۴ : ۱۰ = ۰/۰۱۷۴$  .

۱۵۳ - جمع کردن اعداد اعشاری - برای جمع کردن چند عدد اعشاری آنها را چنان زیر یکدیگر می نویسند که آحاد هر مرتبه از مراتب مختلف صحیح و اعشاری زیر یکدیگر در يك ستون قرار گیرند (واضح است که در این صورت ممیزها نیز زیر یکدیگر واقع می شوند) . بعد ، از طرف راست جمع را مانند جمع اعداد صحیح انجام می دهند و وقتی که خواستند ستون آحاد را جمع کنند در حاصل ممیز می گذارند .

تمرین - با ذکر يك مثال دلیل قاعده فوق را بیان کنید.

۱۵۴ - تفریق اعداد اعشاری - برای تفریق کردن اعداد اعشاری

نیز مانند عددهای صحیح ، مفروق را چنان زیر مفروق منه می نویسند که آحاد هر مرتبه محاذی هم اسم خود واقع شود و در ضمن تفریق همینکه به ستون آحاد رسیدند در باقیمانده ممیزی قرار می دهند.

باید متوجه بود که در جمع و تفریق در طرف راست عاملی که عددهای اعشاری کمتر است بخیال آنقدر صفر فرض می کنیم که ارقام اعشاری در جمیع عوامل برابر شود .

تمرین - با ذکر مثال ، دلیل قاعده فوق را بیان کنید .

۱۵۵ - ضرب کردن دو عدد اعشاری - فرض کنیم که می خواهیم

دو عدد  $۱۳/۴$  و  $۲/۷۲$  را در هم ضرب کنیم . می نویسیم :

$$۲/۷۲ \times ۱۳/۴ = \frac{۲۷۲}{۱۰۰} \times \frac{۱۳۴}{۱۰} = \frac{۲۷۲ \times ۱۳۴}{۱۰۰۰} = \frac{۳۶۴۴۸}{۱۰۰۰} = ۳۶/۴۴۸$$

و از آنجا قاعده زیر بدست می آید :

برای ضرب کردن دو عدد اعشاری ، ابتدا از ممیزها صرف نظر کرده دو عدد را مانند اعداد صحیح در هم ضرب می کنیم و سپس با يك ممیز از سمت راست حاصل ضرب به تعداد مجموع عددهای ارقام اعشاری دو عدد رقم جدا می کنیم و در صورتی که عددهای ارقام حاصل ضرب کافی نباشد به اندازه لازم در سمت چپ آن صفر گذارده ممیز می زنیم .  $۰/۲۵ \times ۰/۰۴۸ = ۰/۰۱۲$  .

۱۵۶ - تقسیم يك عدد اعشاری بر عدد اعشاری دیگر - برای تعیین خارج قسمت کامل دو عدد اعشاری کافی است اعداد اعشاری مفروض را به صورت کسر متعارفی بنویسیم و خارج قسمت کامل آنها را تعیین کنیم .

مثلاً فرض می کنیم که مقصود یافتن خارج قسمت کامل عدد  $۲۳/۸۵$  بر  $۳/۵$  باشد . می نویسیم :

$$۲۳/۸۵ : ۳/۵ = \frac{۲۳۸۵}{۱۰۰} : \frac{۳۵}{۱۰} = \frac{۲۳۸۵ \times ۱۰}{۱۰۰ \times ۳۵} = \frac{۲۳۸۵}{۳۵۰} = \frac{۴۷۷}{۷۰}$$

پس خارج قسمت کامل دو عدد اعشاری در حالت کلی مساوی است با يك

کسر متعارفی . اکنون این سؤال پیش می آید که آیا همواره می توان عددی اعشاری یافت که مساوی يك کسر متعارفی مفروض باشد ؟ قضیه

زیر شرط وجود این عدد را معین می‌سازد.

**۱۵۷ - قضیه -** شرط لازم و کافی برای آنکه يك كسر متعارفی تحويل ناپذیر مساوی با يك كسر اعشاری باشد، این است که مخرج آن شامل عوامل اولی جز ۲ و ۵ نباشد. (در این صورت می‌گویند كسر متعارفی بطور تحقیق به يك كسر اعشاری تبدیل پذیر است).

**برهان -** كسر  $\frac{a}{b}$  را در نظر می‌گیریم و آن را تحويل ناپذیر فرض می‌کنیم. هر كسر دیگری که با  $\frac{a}{b}$  مساوی باشد، صورت و مخرجش مضربی است از  $a$  و  $b$ . پس اگر داشته باشیم:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{10^n}$  حتماً  $10^n$  (یا  $2^n \times 5^n$ ) مضربی است از  $b$ ، پس  $b$  نمی‌تواند عامل اولی جز ۲ و ۵ داشته باشد.

برعکس، فرض کنیم که  $b$  عامل اولی جز ۲ و ۵ نداشته به صورت  $b = 2^\alpha \times 5^\beta$  باشد. در این صورت اگر  $\alpha < \beta$  باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^\alpha \times 5^\beta} = \frac{a \times 2^{\beta-\alpha}}{2^\beta \times 5^\beta} = \frac{a \times 2^{\beta-\alpha}}{10^\beta}$$

و اگر  $\alpha > \beta$  باشد نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^\alpha \times 5^\beta} = \frac{a \times 5^{\alpha-\beta}}{2^\alpha \times 5^\alpha} = \frac{a \times 5^{\alpha-\beta}}{10^\alpha}$$

و در هر دو حالت كسر  $\frac{a}{b}$  مساوی با يك كسر اعشاری است.

از آنچه گفته شد، نتیجه می‌شود که اگر مخرج كسر تحويل ناپذیر  $\frac{a}{b}$  شامل عوامل اولی غیر از ۲ و ۵ باشد، نمی‌توان كسری اعشاری بدست آورد که مساوی با  $\frac{a}{b}$  باشد.

**تبصره -** دیدیم که در هر حال قوه ۱۰ (در مخرج) مساوی است با بزرگترین قوای عوامل ۲ و ۵ که از تجزیه كسر متعارفی مفروض بدست می‌آید.

بنابراین: عدد ارقام اعشاری كسر اعشاری حاصل مساوی است با بزرگترین نماینده ۲ و ۵ که از تجزیه مخرج كسر متعارفی مفروض به عوامل اول بدست می‌آید.

**مثال:** هر يك از كسرهای متعارفی  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{7}{8}$  و  $\frac{11}{9}$  مساوی با يك كسر اعشاری است ولی هیچ كسر اعشاری نمی‌توان یافت که مساوی با كسرهای  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{6}{35}$  و  $\frac{11}{6}$  باشد.

### ۶ = مقدار تقریبی يك كسر

**۱۵۸ -** در عمل، عموماً اهمیتی ندارد که يك كسر متعارفی مساوی با كسر اعشاری باشد یا نباشد و در هر دو حال به جای كسرهای متعارفی اغلب مقادیر تقریبی آنها را بر حسب اعداد اعشاری قرار می‌دهند بطوری که ممکن است تفاضل عدد مفروض و عدد اعشاری مزبور هر قدر که بخواهیم کوچکتر اختیار شود.

مثلاً فرض کنیم که مقصود، تعیین عدد اعشاری باشد که تفاضل آن با كسر  $\frac{a}{b}$  کوچکتر از  $\frac{1}{10^\alpha}$  باشد و برای این کار سلسله كسرهای زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{1}{10^\alpha}, \frac{2}{10^\alpha}, \frac{3}{10^\alpha}, \dots, \frac{x}{10^\alpha} \text{ و } \frac{x+1}{10^\alpha}$$

كسر  $\frac{a}{b}$  یا با یکی از اعداد این سلسله مساوی است یا مابین دو عدد متوالی آن قرار دارد. مثلاً داریم:

$$\frac{x}{10^{\alpha}} \leq \frac{a}{b} < \frac{x+1}{10^{\alpha}}$$

و بنابراین تفاضل کسر  $\frac{a}{b}$  و کسر اعشاری  $\frac{x}{10^{\alpha}}$  از  $\frac{1}{10^{\alpha}}$  کوچکتر یا با آن مساوی است، مقدار  $\frac{x}{10^{\alpha}}$  را مقدار تقریبی نقصانی کسر  $\frac{a}{b}$  تا  $\frac{1}{10^{\alpha}}$  واحد می نامند و از آنجا تعریف زیر بدست می آید:

**تعریف -** مقدار تقریبی نقصانی کسر  $\frac{a}{b}$  تا  $\frac{1}{10^{\alpha}}$  واحد، بزرگترین عدد اعشاری است که دارای  $\alpha$  رقم اعشاری باشد و مقدارش از  $\frac{a}{b}$  تجاوز نکند.

بنا بر آنچه گفتیم مقدار تقریبی کسر  $\frac{a}{b}$  تا  $\frac{1}{10^{\alpha}}$  واحد، کسری است اعشاری مانند  $\frac{x}{10^{\alpha}}$  که در روابط زیر صدق کند:

$$\frac{x}{10^{\alpha}} \leq \frac{a}{b} < \frac{x+1}{10^{\alpha}}$$

چون طرفین هر يك از این روابط را در  $10^{\alpha}$  ضرب کنیم، حاصل می شود:

$$x \leq \frac{a \times 10^{\alpha}}{b} < x+1$$

و از اینجا معلوم می شود که صورت کسر مطلوب یعنی  $x$  بزرگترین عدد صحیحی است که در آن  $\frac{a \times 10^{\alpha}}{b}$  می گنجد یا به عبارت دیگر مساوی است با خارج قسمت تقسیم عدد  $a \times 10^{\alpha}$  بر عدد  $b$ .

**مثال -** مقدار تقریبی کسر  $\frac{23}{7}$

| تا ۰/۰۰۱ واحد | تا ۰/۰۱ واحد | تا ۰/۱ واحد |
|---------------|--------------|-------------|
| ۲۳۰۰۰   ۷     | ۲۳۰۰   ۷     | ۲۳۰   ۷     |
| ۲۰   ۳۲۸۵     | ۲۰   ۳۲۸     | ۲۰   ۳۲     |
| ۶۰            | ۶۰           | ۶           |
| ۴۰            | ۴            |             |
| ۵             |              |             |
| جواب ۳/۲۸۵    | جواب ۳/۲۸    | جواب ۳/۲    |

مثلاً می توان نوشت:  $\frac{23}{7} < \frac{23}{7} < \frac{23}{7}$

### ۱۵۹ - محاسبه خارج قسمت تقریبی دو عدد اعشاری -

فرض کنیم مقصود تقسیم  $۸۵/۶۷$  بر  $۵/۹$  باشد. خارج قسمت کامل\* این تقسیم عبارت است از  $\frac{۸۵/۶۷}{۵/۹}$  که مساوی است با  $\frac{۸۵۶۷}{۵۹۰}$  (شماره ۱۵۶) و مقدار تقریبی کسر را مطابق آنچه گذشت با هر تقریبی که بخواهیم می توانیم حساب کنیم. حال برای آنکه يك قاعده عملی بدست آوریم، ملاحظه می کنیم که از يك طرف اگر عددی را بر  $۵۹۰$  یا بر  $۵۹$  تقسیم کنیم سلسله اعدادی که در خارج قسمت بدست می آید در هر دو حالت یکی است و از طرف دیگر برای آنکه جزء صحیح خارج قسمت  $۸۵۶۷$  را

\* **تذکر مهم -** نباید خارج قسمت کامل  $a$  را بر  $b$  با خارج قسمت

تقریبی آن اشتباه کرد ... خارج قسمت کامل  $a$  بر  $b$  عددی است صحیح یا کسری که چون آن را در  $b$  ضرب کنیم  $a$  حاصل شود و این خارج قسمت را با علامت  $\frac{a}{b}$  نمایش می دهند (شماره ۱۴۸). خارج قسمت تقریبی  $a$  بر  $b$  تا يك واحد، بزرگترین عدد صحیحی است که چون آن را در  $b$  ضرب کنیم حاصل مساوی یا کوچکتر از  $a$  شود (شماره ۵۶).

بر ۵۹۰ (یعنی خارج قسمت تقریبی تا يك واحد) را پیدا کنیم می توانیم ابتدا ۸۵۶۷ را بر ۱۰ تقسیم کنیم تا ۸۵۶ بدست آید و سپس این عدد را بر ۵۹ تقسیم کنیم. بنابراین برای تعیین مقادیر کسر  $\frac{۸۵۶۷}{۵۹۰}$  می توان به جای این کسر، کسر  $\frac{۸۵۶۷}{۵۹}$  را قرار داد به شرط آنکه وقتی آخرین رقم عدد ۸۵۶ را بکار بردیم، یعنی در موقع فرود آوردن ۷، در خارج قسمت ممیز بزنیم.

**۱۶۰- قاعده -** برای بدست آوردن خارج قسمت تقریبی تقسیم يك عدد اعشاری بر عدد اعشاری دیگر، ابتدا از ممیز مقسوم علیه صرف نظر کرده ممیز مقسوم را به عدد ارقام اعشاری مقسوم علیه به طرف راست انتقال می دهیم (و در صورت لزوم هر چند صفر که لازم باشد در سمت راست اعداد مقسوم می افزاییم) و سپس تقسیم را مانند تقسیم اعداد صحیح انجام می دهیم و همینکه رقم مرتبه دهم یعنی اولین رقم اعشاری مقسوم را فرود می آوریم در خارج قسمت ممیزی قرارداده تقسیم را تا هر اندازه لازم باشد ادامه می دهیم و عاقبت از سمت راست باقیمانده به عدد مجموع ارقام اعشاری خارج قسمت و مقسوم علیه اصلی با ممیزی رقم جدا می کنیم.

| مثال - محاسبه خارج قسمت تقریبی                                                                              |       | محاسبه خارج قسمت تقریبی                                                                                    |       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| ۵/۹ : ۸۵/۶۷ تا ۰/۰۱ واحد                                                                                    |       | ۴۳۵/۶ : ۳۶ تا ۰/۰۱ واحد                                                                                    |       |
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>۸۵/۶۷ : ۵/۹</math> </div> |       | <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>۳۶ : ۴۳۵/۶</math> </div> |       |
| ۸۵۶/۷                                                                                                       | ۵۹    | ۳۶۰/۰۰                                                                                                     | ۴۳۵۶  |
| ۲۶۶                                                                                                         |       | ۱۱ ۵۲۰                                                                                                     |       |
| ۳۰ ۷                                                                                                        | ۱۴/۵۲ | ۲ ۸۰۸                                                                                                      | ۰/۰۸۲ |
| ۱ ۲۰                                                                                                        |       |                                                                                                            |       |
| ۲                                                                                                           |       |                                                                                                            |       |
| باقیمانده = ۰/۰۰۲                                                                                           |       | باقیمانده = ۰/۲۸۰۸                                                                                         |       |

## ۷- اعداد اعشاری متناوب

**۱۶۱- تبصره کلی -** دیدیم که اولاً اگر مخرج کسر تحویل ناپذیر  $\frac{a}{b}$  شامل عوامل اولی جز ۲ و ۵ باشد، نمی توان کسری اعشاری یافت که مساوی  $\frac{a}{b}$  باشد (شماره ۱۵۷). ثانیاً برای تعیین مقدار تقریبی و نقصانی کسر  $\frac{a}{b}$  تا  $\frac{1}{10^n}$  واحد، کافی است که خارج قسمت تقسیم عدد  $a \times 10^n$  را بر عدد  $b$  پیدا کنیم (شماره ۱۵۸)، مثلاً:

مقدار تقریبی نقصانی کسر  $\frac{1}{11}$  تا  $\frac{1}{10^6}$  واحد عبارت است از ۰/۷۲۷۲۷۲  
 « « «  $\frac{2}{37}$  تا  $\frac{1}{10^6}$  « « « ۰/۰۵۴۰۵۴  
 « « «  $\frac{29}{55}$  تا  $\frac{1}{10^8}$  « « « ۰/۷۰۹۰۹۰۹۰

از روی این سه مثال دیده می شود که وقتی مقادیر تقریبی کسر  $\frac{a}{b}$  را می نویسیم، يك عدد از ارقام اعشاری (متناوباً) به ترتیب معینی تکرار می شوند. مثلاً برای آنکه مقادیر تقریبی کسر  $\frac{1}{11}$  را با ارقام اعشاری بیشتری بدست آوریم، کافی است که بعد از ممیز هر قدر می خواهیم چندین بار عدد ۷۲ را به توالی یکدیگر بنویسیم: ۰/۷۲۷۲۷۲۷۲.....  
 يك چنین عدد اعشاری را **عدد اعشاری متناوب** می نامند. همچنین است مقادیر تقریبی کسر  $\frac{2}{37}$  یعنی: ۰/۰۵۴۰۵۴۰۵۴۰.....

چون ممکن نیست تمام ارقام يك عدد اعشاری متناوب را بنویسیم، بعد از ممیز معمولاً دو یا چند مرتبه دوره گردش را نوشته بعد از آن چند نقطه می گذاریم.

**۱۶۲- تعریف -** مجموع رقمهایی را که در يك عدد اعشاری

متناوب تکرار می شود (در مثالهای فوق این اعداد عبارتند از ۷۲ و ۵۴ و ۵۹) **دوره گردش** می نامند. حال اگر دوره گردش بلافاصله بعد از ممیز شروع شود عدد اعشاری متناوب را **متناوب ساده** خوانند. ولی ممکن است در يك عدد اعشاری متناوب بعد از ممیز ابتدا چند رقم قرار گرفته بعد از آنها دوره گردش شروع شود. مثلاً در عدد اعشاری متناوب  $0,513232.../$  دوره گردش که عبارت است از ۳۲ بعد از ۵۱ شروع می شود. در این صورت عدد اعشاری متناوب را **متناوب مرکب** و مجموعه رقمهایی را که مابین ممیز و اولین دوره گردش واقع می شود **جزء غیر گردش** می نامند. در مثال فوق جزء غیر گردش ۵۱ و دوره گردش ۳۲ است.

**۱۶۳ - قضیه -** اگر کسر تحویل ناپذیر  $\frac{a}{b}$  بطور تحقیق مساوی با يك کسر اعشاری نباشد و صورت آن را بر مخرجش تقسیم کنیم و این تقسیم را ادامه دهیم، يك عدد اعشاری متناوب حاصل خواهد شد (در این صورت می گویند کسر  $\frac{a}{b}$  مولد عدد اعشاری متناوب است).

|    |          |                                      |
|----|----------|--------------------------------------|
| ۵۰ | ۷        | برهان - کسر $\frac{5}{7}$ را در نظر  |
| ۱۰ | ۰/۷۱۴۲۸۵ | گرفته مقادیر تقریبی آن را حساب       |
| ۳۰ |          | می کنیم. هریک از باقیمانده های       |
| ۲۰ |          | جزئی متوالی یعنی ۵ و ۱ و ۳ و ۲ و ... |
| ۶۰ |          | کوچکتر از ۷ است. بنابر این           |
| ۴۰ |          | حد اکثر بعد از ۶ تقسیم جزئی          |
| ۵  |          |                                      |

یکی از باقیمانده های جزئی قبلی بدست می آید و لذا ابتدا از رقم نظیر آن در خارج قسمت يك سلسله ارقام تکرار خواهد شد.

**تبصره ۱ -** اعداد اعشاری متناوب که در شماره های قبل تعریف کرده ایم از لحاظ اینکه عدد ارقام اعشاری آنها نامحدود است يك نوع اعداد تازه هستند و حق نداریم خواص اعداد اعشاری را در باره آنها صادق بدانیم.

**تبصره ۲ -** در يك عدد اعشاری متناوب ممکن است بعد از ممیز يك یا چند صفر وجود داشته باشد که بنهایی دوره غیر گردش را تشکیل دهند مانند ... ۰/۵۰۲۵۲۵، یا جزو دوره غیر گردش باشند مانند ... ۰/۵۵۲۷۲۷...

**۱۶۴ - مسئله -** يك عدد اعشاری متناوب مفروض است؛ می خواهیم ببینیم آیا کسری متعارفی وجود دارد که اگر صورت آن را بر مخرجش تقسیم کنیم، عدد اعشاری متناوب مفروض حاصل شود.

همواره می توان عدد متناوب مفروض را کوچکتر از ۱ فرض کرد، زیرا مثلاً اگر مولد کسر ... ۵/۵۵ کسر  $\frac{a}{b}$  باشد، مولد کسر ... ۱۲/۵۵۵ کسر  $\frac{a}{b} + ۱۲$  خواهد بود و برعکس.

**تعریف -** اگر چنین کسری وجود داشته باشد، آن را **مولد عدد اعشاری متناوب مفروض** می نامند.

برای حل این مسئله بدو می بینیم که اگر کسرهای  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{a'}{b'}$  هر دو مولد عدد اعشاری متناوب مفروض باشند، این دو کسر متساویند. زیرا اگر مقادیر تقریبی  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{a'}{b'}$  تا  $\frac{1}{10^n}$  واحد متساوی باشند و این

مقدار تقریبی را  $\frac{q}{10^n}$  بنامیم هر دو کسر  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{a'}{b'}$  مابین  $\frac{q}{10^n}$  و  $\frac{q+1}{10^n}$

محصولند و بنابراین تفاضل آنها از  $\frac{1}{10^n} - \frac{q}{10^n} = \frac{q+1}{10^n}$  کوچکتر است .  
حال ملاحظه می‌کنیم که این تفاضل که به ازای جمیع مقادیر  $n$  کوچکتر از  $\frac{1}{10^n}$  است ، ناچار صفر است و لذا کسره‌های  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{a'}{b'}$  متساویند . بنابراین مسئله حداکثر يك جواب دارد و برای حل آن بر حسب آنکه عدد اعشاری متناوب مفروض ، ساده یا مرکب باشد، دو حالت تمیز می‌دهیم :

#### حالت اول- عدد اعشاری متناوب مفروض ساده است - ( مثلا

$0/6464\dots$  ) - اگر کسر  $\frac{a}{b}$  مولد عدد  $0/6464\dots$  باشد و مقدار تقریبی  $\frac{a}{b}$  را تا  $\frac{1}{100}$  واحد حساب کنیم باید کسر  $\frac{64}{100}$  بدست آید .  
به عبارت دیگر اگر  $100a$  را بر  $b$  تقسیم کنیم خارج قسمت ۶۴ خواهد بود و بعلاوه باقیمانده باید مساوی با  $a$  باشد و این ممکن است زیرا  $a$  از  $b$  کوچکتر است پس داریم :

$$100a = b \times 64 + a \quad \text{یا} \quad 99a = b \times 64$$

و بنا بر این  $\frac{a}{b} = \frac{64}{99}$  ، پس کسر  $\frac{64}{99}$  مولد عدد  $0/6464\dots$  خواهد بود .

این استدلال کلی است و در مورد هر عدد اعشاری متناوبی که مخالف با  $0/99\dots$  باشد صدق می‌کند .

اگر عدد متناوب مفروض  $0/99\dots$  باشد ، باید داشته باشیم :  
 $10a = 9b + a$  یعنی  $a = b$  و چنین چیزی ممکن نیست . بنا بر آنچه گذشت می‌توان گفت :

قضیه ۱ - هر عدد اعشاری متناوب ساده کوچکتر از يك که دوره گردش آن ۹ نباشد ، دارای کسر مولدی است که صورت آن ، دوره گردش است و مخرج آن ، عددی است که فقط با رقم ۹ نوشته شده و عدد ارفامش مساوی با عدد ارقام دوره گردش باشد. عدد متناوب ساده  $0/99,99\dots$  دارای کسر مولد نیست .

مثال - کسر مولد  $0/7373\dots$  عبارت است از  $\frac{73}{99}$  و کسر مولد  $0/432432\dots$  عبارت است از  $\frac{432}{999}$  یا  $\frac{48}{111}$  یا  $\frac{159}{333}$  .

#### حالت دوم - عدد اعشاری متناوب مفروض ، مرکب است -

حالت خاص - جزء غیر گردش از صفر تشکیل شده است مانند  $0/00451451\dots$  -  
چون کسر  $\frac{451}{999}$  عدد متناوب  $0/451451\dots$  را تولید می‌کند ، کسر  $\frac{451}{99900}$  عدد متناوب  $0/00451451\dots$  را تولید خواهد کرد (زیرا برای آنکه عددی را بر  $100 \times 999$  تقسیم کنیم می‌توانیم آن عدد را بر ۹۹۹ تقسیم کنیم و در خارج قسمت ممیز را دو رقم به سمت چپ انتقال دهیم).  
پس مولد عدد متناوب  $0/00451451\dots$  عبارت است از :  $\frac{451}{99900}$  .

#### حالت کلی - جزء غیر گردش دلخواه است مانند $0/28537537\dots$ -

چون  $\frac{537}{999}$  عدد متناوب  $0/537537\dots$  را تولید می‌کند عدد  $\frac{537}{999} + 28$  یا  $\frac{28 \times 999 + 537}{999}$  عدد متناوب  $0/28537537\dots$  را تولید خواهد کرد و چنانکه در فوق بیان کردیم ، کسر  $\frac{28 \times 999 + 537}{99900}$  عدد متناوب  $0/28537537\dots$  را تولید خواهد کرد . پس مولد  $0/28537537\dots$  عبارت است از  $\frac{28 \times 999 + 537}{99900}$  .

می‌توان صورت این کسر را به این شکل نوشت :

$$28 - 28537 = 28000 + 537 - 28 \quad 28(1000 - 1) + 537 = 28000 + 537 - 28$$

و ارا اینجا کسر مولد به صورت  $\frac{28537-28}{99900}$  در می آید و می توان گفت:

**قضیه ۲-** هر عدد اعشاری متناوب مرکب کوچکتر از يك كه دوره گردش آن ۹ نباشد دارای يك کسر مولد است. برای بدست آوردن صورت این کسر مولد، جزء غیر گردش و يك دوره گردش را می نویسیم و جزء غیر گردش را از آن کم می کنیم و برای بدست آوردن مخرج آن، به عدد ارقام دوره گردش ۹ می نویسیم و سمت راست آن به عدد ارقام جزء غیر گردش صفر می گذاریم.

**مثال-** کسر مولد  $0.54848 \dots$  عبارت است از  $\frac{548-5}{990}$ . و کسر مولد  $0.0002525 \dots$  عبارت است از  $\frac{1}{3960} = \frac{25}{99000}$ . و بالاخره کسر مولد  $0.4874545 \dots$  عبارت است از  $\frac{48745-7}{990}$  یعنی  $48\frac{745}{990}$  یا  $48\frac{41}{55}$ .

**۱۶۵- مسئله -** کسر تحویل ناپذیر  $\frac{a}{b}$  را در نظر گرفته می خواهیم بدون تقسیم کردن صورت بر مخرج، تعیین کنیم که در چه صورت این کسر، مولد يك عدد اعشاری متناوب ساده و در چه صورت مولد يك عدد اعشاری متناوب مرکب خواهد بود \*

**الف -** در دو حالت مختلف که کسر تحویل ناپذیر  $\frac{a}{b}$  مولد يك

\* کسر تحویل ناپذیر  $\frac{a}{b}$  را کوچکتر از واحد فرض می کنیم: زیرا هر کسر بزرگتر از واحد (کسر نما) را می توان رفع کرد و واضح است که در این صورت قسمت صحیح عدد حاصل در چگونگی قسمت کسری آن تأثیری نخواهد داشت.

عدد متناوب ساده یا مولد يك عدد متناوب مرکب باشد، چگونگی مخرج آن را مورد مطالعه قرار می دهیم:

اولاً - اگر کسر  $\frac{a}{b}$  مولد يك عدد اعشاری متناوب ساده مثلاً  $0.2424 \dots$  باشد، داریم  $\frac{a}{b} = \frac{24}{99}$  (شماره ۱۶۴) و چون  $\frac{a}{b}$  تحویل ناپذیر است، ۹۹ مضربی است از  $b$  یعنی  $b$  عدد ۹۹ را می شمارد و چون در تجزیه ۹۹ هیچ يك از عاملهای اول ۲ و ۵ وجود ندارد، عدد  $b$  نیز بر ۲ و ۵ قابل قسمت نیست.

ثانیاً - اگر کسر  $\frac{a}{b}$  مولد يك عدد اعشاری متناوب مرکب مثلاً  $0.234949 \dots$  باشد، داریم  $\frac{a}{b} = \frac{2349-23}{9900}$  و واضح است که آخرین رقم دوره گردش و آخرین رقم جزء غیر گردش مساوی نیستند و الا دوره گردش از يك رقم جلوتر شروع می شد. پس رقم یکان تفاضلی که در صورت نوشته شده هرگز مساوی صفر نیست، یعنی صورت کسر  $\frac{2349-23}{9900}$  هرگز در عین حال بر ۲ و ۵ قابل قسمت نیست.

حال چون در سمت راست مخرج کسر فوق همواره يك یا چند صفر وجود دارد، بر ۲ و ۵ قابل قسمت است و اگر این کسر را به ساده ترین صورت خود تحویل کنیم (تا  $\frac{a}{b}$  حاصل شود) لا اقل مخرج یعنی  $b$  بر یکی ازدو عدد ۲ و ۵ (یا بر هر دو آنها) قابل قسمت خواهد بود. از طرف دیگر  $b$  حتماً عاملهای اولی غیر از ۲ و ۵ دارد، زیرا در غیر این صورت  $\frac{a}{b}$  مولد يك عدد متناوب ساده خواهد بود.

**ب -** اکنون به فرض آنکه  $b$  یکی از شرایط فوق را دارا باشد، چگونگی کسر  $\frac{a}{b}$  را مطالعه می کنیم.

اولاً -  $b$  فقط شامل عوامل ۲ و ۵ است و می دانیم که در این صورت

ا. ... است با يك كسر اعشاری تحقیقی .

ثانیاً - b نه بر ۲ قابل قسمت است نه بر ۵ پس  $\frac{a}{b}$  مساوی يك كسر اعشاری تحقیقی نیست و يك عدد متناوب تولید می کند و این عدد متناوب ساده است، زیرا اگر مرکب بود مطابق قسمت الف، b یا بر ۲ یا بر ۵ قابل قسمت بود .

ثالثاً - b بر ۲ یا بر ۵ قابل قسمت است ولی عاملهای اولی جز ۲ و ۵ نیز دارد . در این صورت  $\frac{a}{b}$  مساوی يك كسر اعشاری تحقیقی نیست و يك عدد اعشاری متناوب تولید می کند و این عدد متناوب حتماً مرکب است زیرا اگر ساده بود مطابق قسمت الف، b نه بر ۲ قابل قسمت بود و نه بر ۵، پس قضیه زیر ثابت است :

**قضیه - اولاً -** كسر تحویل ناپذیر  $\frac{a}{b}$  مولد يك عدد اعشاری متناوب ساده است اگر مخرجش نه بر ۲ قابل قسمت باشد و نه بر ۵.

**ثانیاً -** كسر تحویل ناپذیر  $\frac{a}{b}$  مولد يك عدد اعشاری متناوب مرکب است هرگاه مخرج آن لااقل بر یکی از دو عدد ۲ و ۵ قابل قسمت بوده شامل عامل اولی غیر از ۲ و ۵ نیز باشد.

**تبصره -** فرض می کنیم مخرج كسری که مولد يك عدد اعشاری متناوب مرکب است به صورت  $10^n \times 99 \dots 99$  باشد و ملاحظه می کنیم که صورت چنین كسری بر ۱۰ قابل قسمت نیست (شماره ۱۶۵ - الف - ثانیاً) . از طرف دیگر داریم  $10^n = 2^n \times 5^n$ ، پس بعد از ساده کردن كسر مزبور لااقل یکی از دو عامل ۲ و ۵ به قوه n باقی خواهد ماند و n شماره صفرهای مخرج است .

پس : عدد ارقام غیر گردش عدد متناوب مركب مساوی است با بزرگترین نماینده عاملهای ۲ و ۵ که در مخرج كسر تحویل ناپذیر مولد آن موجود است .

### مسائل

۱ - با در نظر گرفتن اینکه هر عدد اعشاری يك كسر است ثابت کنید که حاصل ضرب  $0/875 \times 9/84 \times 0/84$  مساوی است با حاصل ضرب  $87/5 \times 984/0$  .  
۲ - ثابت کنید که هرگاه از سمت راست يك عدد اعشاری يك عده ارقام اعشاری حذف کنیم اشتباه حاصل کوچکتر است از يك واحد از مرتبه آخرین رقمی که حذف نشده است .

۳ - خارج قسمت تقریبی تقسیم  $475/9$  را بر  $4500$  تا  $0/001$  واحد حساب و مقدار واقعی باقیمانده را تعیین کنید .

(جواب : خارج قسمت  $= 0/105$  و باقیمانده  $= 3/4$ )  
۴ - مطلوب است تعیین صورت كسری که مخرجش ۲۴۱ بوده مقدار تقریبی نقصانی آن كسر تا  $0/01$  واحد مساوی با  $0/87$  باشد .

(جواب : ۲۱۰ یا ۲۱۱ یا ۲۱۲)  
۵ - هر يك از كسره های زیر را با ضرب کردن صورت و مخرج آن در کوچکترین عدد ممكن به كسر اعشاری تحقیقی تبدیل کنید :

$$\frac{3}{2} \text{ و } \frac{2}{4} \text{ و } \frac{2}{8} \text{ و } \frac{3}{25} \text{ و } \frac{3}{125}$$

۶ - اولاً ثابت کنید که هیچ كسر اعشاری تحقیقی وجود ندارد که مساوی با كسر  $\frac{6}{35}$  باشد. ثانیاً مقدار تقریبی نقصانی كسر مزبور را تا  $0/001$  واحد حساب کرده تفاضل كسر  $\frac{6}{35}$  و مقدار تقریبی آن را (تا  $0/001$  واحد) بیابید.

(جواب : قسمت ثانیاً  $0/172$  و تفاضل مطلوب مساوی است با  $\frac{3}{7000}$ )

۷ - تحقیق کنید که كسر  $\frac{23}{45}$  قابل تبدیل به يك كسر اعشاری تحقیقی است و بدون آنکه صورت آن را بر مخرجش تقسیم کنید عده ارقام اعشاری این كسر اعشاری را تعیین کنید . (جواب : ۳ رقم اعشاری)

۸ - مطلوب است تعیین کسرهای متعارفی که صورت هر يك از آنها ۷ و مخرجشان از ۳۰ کوچکتر باشد و بتوان آنها را به کسر اعشاری تحقیقی تبدیل کرد .

(جواب :  $\frac{7}{4}$  و  $\frac{7}{5}$  و  $\frac{7}{8}$  و  $\frac{7}{10}$  و  $\frac{7}{14}$  و  $\frac{7}{16}$  و  $\frac{7}{20}$  و  $\frac{7}{25}$  و  $\frac{7}{28}$ )  
 ۹ - تعیین کنید از کسرهای تحویل ناپذیر  $\frac{a}{13}$  و  $\frac{b}{40}$  و  $\frac{c}{28}$  و  $\frac{d}{25}$  و  $\frac{e}{24}$  کدامیک مساوی يك کسر اعشاری تحقیقی است و کدامیک مولد يك عدد اعشاری متناوب ساده یا مرکب است .

۱۰ - کسر متناوب ساده  $0.571428571428 \dots$  مفروض است ؛  
 اولاً کسر متعارفی مولد آن را تعیین کنید . ثانیاً این کسر را به ساده‌ترین صورت خود تبدیل کنید . (جواب :  $\frac{4}{7}$ )

۱۱ - با ذکر دلیل کسر متعارفی مولد هر يك از عددهای متناوب زیر را تعیین کنید .

$$0.6363\dots \text{ و } 0.15252\dots \text{ و } 0.32727\dots \text{ و } 0.4255\dots \text{ و } 0.231231\dots \text{ و } 0.451451\dots \text{ و } 0.4327575\dots$$

۱۲ - کسر  $\frac{A}{2^4 \times 3}$  را که در آن A عددی است صحیح در نظر می‌گیریم . اولاً مطلوب است تعیین مقدار A چنانکه این کسر مساوی با يك کسر اعشاری تحقیقی باشد . ثانیاً A را چنان تعیین کنید که کسر مزبور مولد يك عدد اعشاری متناوب ساده یا مرکب باشد .

۱۳ - مطلوب است تعیین کسر متعارفی تحویل ناپذیری که حاصل ضرب صورت و مخرجش ۳۵۰ بوده مساوی يك کسر اعشاری تحقیقی باشد .

$$(جواب : \frac{14}{50} \text{ و } \frac{14}{25} \text{ و } \frac{175}{7})$$

۱۴ - ثابت کنید که عدد n هرچه باشد کسر  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$  مولد عدد اعشاری متناوب مرکب است .

۱۵ - هرگاه n عدد صحیحی باشد ، ثابت کنید کسر  $\frac{2n+1}{n(n+1)}$  تحویل ناپذیر است . n را چگونه باید اختیار کرد تا این کسر معادل با يك عدد اعشاری باشد .

۱۶ - کسر  $\frac{a^2}{b^3}$  مولد عدد اعشاری متناوب ساده‌ای است که دوره گردش آن سه رقم دارد . مطلوب است تعیین a و b و همچنین ارقام گردش . (خرداد ۱۳۳۹)

۱۷ - کسر  $\frac{24}{a}$  کسری غیر ممکن التحویل و a عدد صحیح دو رقمی می‌باشد . اولاً a را چنان تعیین کنید که این کسر قابل تحویل به اعشار باشد . ثانیاً a برابر چه عددی باشد تا این کسر به عدد اعشاری متناوب مرکب تبدیل شود . (خرداد ۱۳۳۷)

$N = 2^4 \times 5^6 \times 7^4$  را در نظر بگیریم می توان آن را چنین نوشت :

$$N = 2^2 \times 2^2 \times 5^3 \times 5^3 \times 7^2 \times 7^2 = (2^2 \times 5^3 \times 7^2) \times (2^2 \times 5^3 \times 7^2)$$

واضح است که  $N$  مساوی است با مربع  $2^2 \times 5^3 \times 7^2$  یعنی  $N$  مربع کامل است .

۱۷۰ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه يك كسر تحويل ناپذیر مساوی با مربع يك كسر دیگر باشد این است که هر يك از دو جمله آن مربع کامل باشد .

برهان - اولاً شرط لازم است ، زیرا اگر كسر تحويل ناپذیر  $\frac{A}{B}$  مساوی با مربع كسر  $\frac{p}{q}$  باشد ، داریم  $\frac{A}{B} = \frac{p^2}{q^2}$  و كسر  $\frac{p^2}{q^2}$  نیز تحويل ناپذیر است و بنابراین داریم :  $A = p^2$  و  $B = q^2$  .

ثانیاً شرط کافی است ، زیرا اگر داشته باشیم  $A = p^2$  و  $B = q^2$  می توان نوشت  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{A}{B}$  پس كسر  $\frac{A}{B}$  مربع کامل است .

۱۷۱ - جذر - اگر يك عدد صحیح یا كسری مانند  $A$  مربع يك عدد صحیح یا كسری دیگری باشد ، عدد صحیح یا كسری دوم را جذر تحقیقی یا باختصار جذر عدد  $A$  می نامند .

مثلاً ۵ جذر عدد ۲۵ و  $\frac{2}{5}$  جذر كسر  $\frac{4}{25}$  و عدد اعشاری  $0.3$  جذر عدد  $0.09$  است . جذر هر عدد را به وسیله علامت  $\sqrt{\quad}$  که رادیکال نامیده می شود می نویسند ، تساوی  $5 = \sqrt{25}$  چنین خوانده می شود : ۵ مساوی است با جذر ۲۵ (هر يك از دو تساوی  $a = \sqrt{A}$  و  $a^2 = A$  از دیگری نتیجه می شود) .

۱۷۲ - اگر هر يك از عددهای سلسله اعداد صحیح را به قوه ۲ برسانیم

## جذر

۱۶۶ - تعریف - مربع هر عدد صحیح یا كسری ، حاصل ضرب دو عامل مساوی با آن عدد است .

مثال -  $5^2 = 5 \times 5 = 25$      $(\frac{3}{1})^2 = \frac{3}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{9}{1}$      $(\frac{4}{3})^2 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$

۱۶۷ - می دانیم که مربع هر كسر تحويل ناپذیر نیز كسری است تحويل ناپذیر . از این مطلب نتیجه می گیریم که اگر عدد صحیح  $A$  مربع يك عدد صحیح نباشد ، مربع يك عدد كسری نیز نخواهد بود .

۱۶۸ - تعریف - يك عدد صحیح را مربع کامل نامند وقتی که آن عدد مساوی با مربع يك عدد صحیح دیگر باشد .

مثلاً اعداد ۹ و ۱۶ و ۲۵ مربع کامل هستند .

۱۶۹ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه يك عدد صحیح مربع کامل باشد این است که اگر آن را به عوامل اول تجزیه کنیم ، نماینده هر يك از این عوامل ، زوج باشد .

برهان - عدد  $P = 2^2 \times 5^3 \times 7^2$  را در نظر گرفته آن را به قوه ۲ می رسانیم حاصل می شود  $P^2 = 2^4 \times 5^6 \times 7^4$  ؛ چنانکه ملاحظه می شود نماینده هر يك از عوامل اول  $P^2$  زوج است . بعکس اگر عدد

ساخته اعداد مربع کامل بدست می آید .

|   |   |   |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
|---|---|---|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴  | ۵  | ۶  | ۷  | ۸  | ۹  | ۱۰  | ۱۱  | ... |
| ۱ | ۴ | ۹ | ۱۶ | ۲۵ | ۳۶ | ۴۹ | ۶۴ | ۸۱ | ۱۰۰ | ۱۲۱ | ... |

و ملاحظه می کنیم که این سلسله نامحدود و صعودی است .

**۱۷۳ - جذر تقریبی تا يك واحد -** جذر تقریبی نقصانی عدد  $A$

تا يك واحد عددی است مانند  $a$  که در روابط زیر صدق کند :

$$(۱) \quad a^2 \leq A < (a+1)^2$$

به عبارت دیگر، این جذر بزرگترین عدد صحیحی است که مربعش مساوی با  $A$  یا کوچکتر از آن باشد . مثال  $۸^2 < ۵۵ < ۷^2$  پس جذر تقریبی ۵۵ تا يك واحد ، عبارت است از ۷ .

اگر عدد  $A$  مربع کامل باشد، در این صورت جذرش تحقیقی است .

**۱۷۴ - تعریف -** باقیمانده جذر عدد  $A$  عبارت است از تفاضل

$A - a^2$  که آن را با  $R$  نمایش می دهیم ، پس داریم :

$$A = R + a^2 \quad \text{یا} \quad R = A - a^2$$

**مثال -** باقیمانده جذر ۵۵ مساوی است با  $۵۵ - ۷^2 = ۶$  .

**۱۷۵ - قضیه -** شرط لازم و کافی برای آنکه  $a$  و  $R$  بترتیب جذر

و باقیمانده جذر  $A$  باشد آن است که :

$$R < 2a + 1$$

**برهان -** اولاً شرط لازم است، زیرا اگر  $a$  جذر  $A$  و  $R$  باقی -

مانده آن باشد داریم :

$$A < (a+1)^2 \quad \text{واز آنجا} \quad a^2 + R < a^2 + 2a + 1$$

$$R < 2a + 1$$

یا :

**ثانیا - شرط کافی است ،** زیرا اگر  $a$  جذر  $A$  و  $R$  باقیمانده

آن باشد، داریم:  $A = a^2 + R$  ؛ پس واضح است که  $a^2 < A$  خواهد بود

و چون به فرض داریم:  $R < 2a + 1$  ، با افزودن  $a^2$  به طرفین این نامساوی

حاصل می شود :  $a^2 + R < a^2 + 2a + 1$  یا  $A < (a+1)^2$  ؛

پس می توان نوشت :  $a^2 < A < (a+1)^2$  یعنی  $a$  جذر عدد  $A$  و  $R$

باقیمانده آن است .

**۱۷۶ - محاسبه جذر تقریبی عدد صحیح -** برای بدست آوردن

جذر يك عدد صحیح دو حالت تمیز می دهیم :

**حالت اول -** عدد مفروض کوچکتر از ۱۰۰ می باشد - در این صورت

چون جذر ۱۰۰ مساوی است با ۱۰ ، واضح است که جذر اعداد کوچکتر از ۱۰۰ از ۱۰ کوچکتر و يك رقمی هستند ؛ با در نظر داشتن مجذور اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰ ، آسانی می توان جذر تقریبی يك عدد صحیح کوچکتر از ۱۰۰ را در ذهن حساب کرد .

**حالت دوم -** عدد مفروض بزرگتر از ۱۰۰ است - در این صورت

باید از قضیه زیر استفاده کرد :

**قضیه -** شماره دهگان جذر هر عدد صحیح مساوی است با جذر شماره

سدگان آن .

**برهان -** عدد ۶۱۵۲۴ را در نظر می گیریم و می بینیم که این

عدد شامل ۶۱۵ سده است . حال اگر جذر تقریبی ۶۱۵ را تا يك واحد

$a$  بنامیم، داریم:  $a^2 < ۶۱۵ < (a+1)^2$  ؛ و چون طرفین هر يك از این

نامساویها را در ۱۰۰ ضرب کنیم حاصل می شود :

$$[10(a+1)]^2 < 61500 < (10a)^2$$

اما اعداد ۶۱۵۰۰ و  $[10(a+1)]^2$  که هر دو مرکب از سدگانند تفاضلشان لا اقل ۱۰۰ است؛ بنابراین اگر به عدد ۶۱۵۰۰ مقدار ۲۴ واحد بیفزاییم، نامساوی سمت راست برقرار می ماند و رابطه سمت چپ به يك نامساوی تبدیل می شود و داریم:

$$[10(a+1)]^2 < 61524 < (10a)^2$$

از این روابط معلوم می شود که جذر تقریبی عدد ۶۱۵۲۴ شامل دهه است ولی شامل  $a+1$  دهه نیست و قضیه ثابت است.

**تبصره -** به همین ترتیب ثابت می شود که شماره سدگان جذر عدد  $A$  مساوی است با جذر شماره ده هزارگان عدد  $A$  و شماره هزارگان جذر عدد  $A$  مساوی است با جذر شماره میلیونهای عدد  $A$  و غیره.

**۱۷۷ - تعیین رقم یکان جذر** - فرض کنیم که می خواهیم جذر عدد  $N = 6948$  را حساب کنیم. شماره دهگان این جذر مساوی است با جذر شماره سدگان عدد  $N$  یعنی جذر تقریبی ۶۹ که مساوی است با ۸؛ حال اگر شماره یکان جذر عدد  $N$  را  $u$  بنامیم، این جذر مساوی است با  $u + 80$  و اگر  $R$  باقیمانده جذر  $N$  باشد داریم:

$$\begin{aligned} 6948 &= (80 + u)^2 + R \\ 6948 &= 6400 + (2 \times 80 \times u) + u^2 + R \\ 6948 - 6400 &= (2 \times 80 \times u) + u^2 + R \\ 548 &= (2 \times 80 \times u) + u^2 + R \end{aligned}$$

یا :  
یا :  
یعنی :

حال اگر  $u^2 + R$  را کنار بگذاریم، خواهیم داشت:  $548 > 2 \times 80 \times u$   
و از آنجا :  
$$u < \frac{548}{2 \times 80}$$

به این ترتیب بزرگترین مقداری که ممکن است به  $u$  نسبت دهیم بدست می آید. به عبارت دیگر،  $u$  مساوی است با خارج قسمت تقسیم ۵۴۸ بر  $2 \times 80$  یا از آن کوچکتر است. (ضمناً ملاحظه می کنیم که به جای آنکه ۵۴۸ را بر  $2 \times 80$  تقسیم کنیم، کافی است ۵۴ را بر  $2 \times 8$  تقسیم کنیم). به این ترتیب عدد ۳ بدست می آید و این عدد بشرطی مقدار  $u$  خواهد بود که بتوانیم مقدار  $3^2 + 2 \times 80 \times 3$  را از ۵۴۸ کم کنیم و چون:  $3^2 + 2 \times 80 \times 3 = 489 = 3 \times 163$  می توان این مقدار را از ۵۴۸ کم کرد، رقم یکان جذر مساوی است با ۳. ضمناً ملاحظه می کنیم که برای بدست آوردن عدد ۱۶۳ کافی است که عدد ۳ را سمت راست ۱۶ یعنی دو برابر ۸ بنویسیم.

**تبصره -** اگر خارج قسمت  $\frac{548}{2 \times 80}$  بزرگ باشد، باید يك واحد از این خارج قسمت کم و عدد حاصل را امتحان کرد.

از آنچه گذشت قاعده عملی زیر برای استخراج جذر (محاسبه جذر) يك عدد بزرگتر از ۱۰۰ بدست می آید:

**۱۷۸ - قاعده -** برای استخراج جذر عددی بزرگتر از ۱۰۰، ابتدا آن عدد را زیر رادیکال می نویسیم و درست راست آن خط قائمی می کشیم و عدد مفروض را از سمت راست به قسمتهای دورقمی مجزا می کنیم و جذر قسمت چپ را (که ممکن است يك رقمی یا دورقمی باشد) بدست می آوریم و قسمت دوم را در سمت راست باقیمانده فرود آورده يك رقم سمت راست آن را جدا می کنیم و جزء سمت چپ را بر ۲ برابر رقم جذر تقسیم می کنیم. رقم خارج قسمت یا عیناً رقم بعدی جذر یا قدری بزرگتر از آن است. برای امتحان، آن را در سمت راست مقسوم علیه (۲ برابر جذر) نوشته. حاصل را در رقم امتحان کردنی ضرب و از مقسوم به انضمام رقمی که صرف نظر شده

بود تفریق می‌کنیم. اگر تفریق ممکن شد رقم امتحان‌شده رقم بعدی جذر است، آن را در سمت راست رقم سابق جذر می‌نویسیم و الایک واحد از آن می‌کاهیم و مجدداً امتحان می‌کنیم تا وقتی که تفریق ممکن شود. آن وقت قسمت دیگری در سمت راست باقیمانده فرود آورده به طریق فوق عمل را تا آخر ادامه می‌دهیم.

مثال - طریقه عملی استخراج جذر عدد ۸۴۵۷۱۵.

|        |        |               |   |
|--------|--------|---------------|---|
| ۸۴۵۷۱۵ | ۹۱۹    | ۹ × ۲ = ۱۸۱   | ۱ |
| ۸۱     | ۳۵۰۷   | ۹۱ × ۲ = ۱۸۲۹ | ۹ |
| ۱۸۱    | ۱۷۶۱۰۵ |               |   |
| ۱۶۴۶۱  | ۱۱۵۴   |               |   |

جذر عدد ۸۴۵۷۱۵ =  $(۹۱۹)^2 + ۱۱۵۴$

۱۷۹- تعریف - جذر تقریبی نقصانی يك كسر تا يك واحد عبارت است از بزرگترین عدد صحیحی که مربعش کوچکتر از آن كسر و یا مساوی با آن باشد.

۱۸۰- قضیه - جذر تقریبی نقصانی يك كسر تا يك واحد مساوی است با جذر تقریبی بزرگترین عدد صحیحی که در آن كسر بگنجد. برهان - اگر عدد كسری  $N = ۲۸۷/۴۵$  را در نظر بگیریم، می‌توانیم بنویسیم  $N = ۲۸۷ + ۵/۴۵$ ؛ و اگر جذر تقریبی نقصانی عدد  $N$  را تا يك واحد  $n$  بنامیم، داریم:

$$(۱) \quad n^2 < ۲۸۷ + ۵/۴۵ < (n+۱)^2$$

عدد  $n^2$  اکثراً مساوی با ۲۸۷ است و واضح است که ۲۸۷ کوچکتر از  $(n+۱)^2$  است چنانکه می‌توان نوشت:

$$(۲) \quad n^2 \leq ۲۸۷ < (n+۱)^2$$

از روی این روابط معلوم می‌شود که  $n$  عبارت است از جذر تقریبی ۲۸۷ تا يك واحد (تقریب نقصانی). برعکس از روابط (۲) می‌توان روابط (۱) را نتیجه گرفت؛ زیرا چون تفاضل ۲۸۷ و  $(n+۱)^2$  لااقل مساوی يك است، اگر عددی کوچکتر از يك به ۲۸۷ اضافه‌کنیم، باز  $(n+۱)^2$  از آن بزرگتر خواهد بود و قضیه ثابت است.

۱۸۱- جذر تقریبی يك عدد تا  $\frac{1}{10^n}$  واحد - تعریف - جذر

تقریبی يك عدد تا  $\frac{1}{10^n}$  واحد بزرگترین كسری است که مخرج آن  $۱۰^n$  و مجذور آن مساوی با عدد مفروض یا کوچکتر از آن باشد؛ به عبارت دیگر، جذر تقریبی  $N$  تا  $\frac{1}{10^n}$  واحد، كسری است مانند  $\frac{a}{10^n}$  که در روابط زیر صدق کند:

$$\left(\frac{a}{10^n}\right)^2 < N < \left(\frac{a+1}{10^n}\right)^2$$

۱۸۲- قضیه - برای محاسبه جذر  $N$  تا  $\frac{1}{10^n}$  واحد (تقریب

نقصانی) کافی است که جذر  $N \times ۱۰^{2n}$  را تا يك واحد تقریب نقصانی حساب و حاصل را بر  $۱۰^n$  تقسیم کنیم.

برهان - زیرا از روابط  $\left(\frac{a}{10^n}\right)^2 < N < \left(\frac{a+1}{10^n}\right)^2$  با ضرب کردن در  $۱۰^{2n}$  نتیجه می‌شود:  $a^2 < N \times ۱۰^{2n} < (a+1)^2$ .

مثال - محاسبه جذر تقریبی عدد  $۳/۱۴۱۵۹۲۶$  تا  $\frac{1}{10}$  - برای

محاسبه جذر این عدد تا  $\frac{1}{10}$  واحد، ابتدا آن را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم حاصل می‌شود  $۳۱۴/۱۵۹۲۶$  و جذر تقریبی این عدد را تا يك واحد حساب می‌کنیم و برای این کار (نظر به قضیه ۱۸۰) کافی است که جذر  $۳۱۴$  را تا يك واحد حساب کنیم، حاصل می‌شود ۱۷؛ پس جذر تقریبی عدد مفروض تا  $\frac{1}{10}$  واحد مساوی است با  $\frac{۱۷}{10}$  یا  $۱/۷$ .

**تمرین - جذر عدد مفروض در مثال فوق را تا  $\frac{1}{1000}$  حساب کنید .**  
**۱۸۳ - اعداد اصم -** می دانیم که اگر عدد صحیح  $A$  مربع يك عدد صحیح دیگر نباشد، مربع عدد کسری هم نخواهد بود (شماره ۱۶۷).  
 از اینجا نتیجه می شود که عددهای صحیحی که جذر تحقیقی ندارند ، مانند ۲، ۳ و ۵ و غیره، جذر تحقیقی کسری نیز نخواهند داشت ؛ یعنی جذر این اعداد نه صحیح است نه کسری .

اعدادی را که به صورت صحیح یا کسری نمی توان نمایش داد، اصم می نامند . مانند  $\sqrt{2}$  یا  $\sqrt{11}$  و غیره . در مقابل اصطلاح اصم، اعداد صحیح یا کسری را منطق می خوانند .

### مسائل

- ۱- جذر تقریبی هر يك از اعداد ۲، ۵، ۶، ۷، ۸، ۱۲، ۱۴ و ۲۵ را تا  $0/0001$  واحد حساب کنید.
- ۲- ثابت کنید که باقیمانده تقسیم هر عدد مربع کامل بر عدد ۹ مساوی صفر یا ۱ یا ۴ یا ۷ است .
- ۳- چه عددی است که اگر  $\frac{2}{3}$  آن را در  $\frac{2}{5}$  آن ضرب کنیم ، حاصل مساوی  $960/4$  شود ؟ (جواب: ۴۹)
- ۴- کوچکترین عددی را پیدا کنید که حاصل ضربش در ۱۹۶۲ مربع کامل باشد . (جواب: ۲۱۸)
- ۵- مطلوب است تعیین دو عدد چنانکه یکی از آنها مساوی با ثلث دیگری و مجموع مربعات آنها ۸۷۴۵ باشد. (جواب: ۲۸ و ۸۴)
- ۶- ثابت کنید که مربع عددی که رقم یکانش ۵ باشد، به ۲۵ ختم می شود.
- ۷- ثابت کنید که عدد صحیحی که رقم دهگانش زوج و رقم یکانش ۶ باشد ، مربع کامل نیست .

۸- تفاضل مربعات دو عدد صحیح متوالی ۱۹۳ است ؛ مطلوب است تعیین این دو عدد . (جواب: ۹۶ و ۹۷)

۹- مطلوب است تعیین دو عدد که مجموعشان ۲۹ و مجموع مربعاتشان ۴۴۵ باشد. (جواب: ۱۸ و ۱۱)  
 ۱۰- اگر عدد فرد  $A$  مربع کامل باشد،  $A-1$  بر ۸ قابل قسمت است.  
 ۱۱- جذر عدد  $0/0082644626$  را تا يك میلیونیم واحد حساب کنید . خواهید دید که اعشار آن از چند رقم مکرر تشکیل شده است . اگر فرض کنید که این ارقام مکرر بشمار باشند ، کسر اعشاری متناوبی خواهید داشت ، مطلوب است کسر متعارفی مولد آن .

(امتحان سال ششم ریاضی خرداد ۱۳۲۷)  
 ۱۲- ثابت کنید که اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  چنان اعداد صحیحی باشند که  $2b^2 = a^2 + c^2$  و  $c$  از  $a$  کوچکتر باشد، تفاضل  $a^2 - c^2$  بر ۴۸ بخش پذیر است .

۱۳- عدد صحیح  $k$  را چنان تعیین کنید که به ازای آن عدد، عبارت  $11 - 2k + k^2$  مربع کامل شود. طریقه بدست آوردن آن چیست ؟

(شهریور ۱۳۳۷)  
 ۱۴- اگر جذر عدد صحیح  $N$  عدد صحیح  $a$  و باقیمانده این جذر  $R$  باشد ، اولاً ماکزیم  $R$  چه عددی است و به چه دلیل ؟ ثانیاً هرگاه  $R < a$  باشد، باقیمانده تقسیم  $N$  بر عدد  $a$  چه عددی است و به چه دلیل ؟ (شهریور ۱۳۳۵)  
 ۱۵- مطلوب است تعیین اعداد صحیحی که مجذورشان مضرب ۵۴ و دارای ۵ رقم باشد . (خرداد ۱۳۳۸)

۱۶- مطلوب است تعیین عدد چهار رقمی مضرب ۹ به شکل  $abba$  که ارقامش دو بدو مساوی و قدر مطلق  $|a-b|=1$  باشد .  
 اولاً عددهای جوابی مسئله را پیدا کنید.

ثانیاً بین جوابهای فوق فقط یکی بر ۱۲۱ بخش پذیر است . اگر  $A$  این جواب باشد مطلوب است کوچکترین عددی که مجذورش بر  $A$  بخش پذیر باشد. (خرداد ۱۳۳۸)

۱۹۴- تعریف - تقسیم عدد  $N$  به نسبت اعداد  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، یعنی پیدا کردن سه عدد که مجموعشان مساوی با  $N$  باشد و خودشان با اعداد  $a$ ،  $b$  و  $c$  متناسب باشند.

دستور کلی - می‌خواهیم عدد  $N$  را به نسبت اعداد  $a$ ،  $b$  و  $c$  تقسیم کنیم؛ اگر قسمتهای مطلوب را  $x$ ،  $y$  و  $z$  بنامیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{N}{a+b+c}$$

$$\text{پس } x = \frac{Na}{a+b+c} \text{ و } y = \frac{Nb}{a+b+c} \text{ و } z = \frac{Nc}{a+b+c}$$

۱۹۵- برای آنکه عددی را به نسبت چند کسر تقسیم کنیم، ابتدا کسرها را به يك مخرج تحويل و سپس آن عدد را به نسبت صورتها تقسیم می‌کنیم.

### مسائل

۱- ثابت کنید که اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، روابط زیر برقرار است:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} \quad (\text{الف}) \quad \frac{a^3}{b^3} = \frac{c^3}{d^3} \quad (\text{ب}) \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}} \quad (\text{ج}) \quad \frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{a}{b}$$

۲- ثابت کنید که از تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  روابط زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{ac}{bd} = \frac{(a+c)^2}{(b+d)^2} \quad \text{و} \quad \frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$$

۳- نسبت دو عدد مثل ۲ است به ۳ و اگر ۹ واحد به هریک از آنها اضافه کنیم، نسبت اعداد حاصل مثل ۳ است به ۴. مطلوب است تعیین این دو عدد. (جواب: ۱۸ و ۲۷)

## فصل دهم

### خطاها

قبلا به وسیله يك مثال، موضوعی را که می‌خواهیم مورد مطالعه قرار دهیم، تشریح می‌کنیم. فرض کنیم که با در دست داشتن قطعه چوبی به طول يك متر بخواهیم مساحت سطح يك حیاط مستطیل شکل را حساب کنیم. واضح است که ابتدا باید طول و عرض حیاط را اندازه بگیریم. حال فرض می‌کنیم که عرض حیاط بین ۱۵ متر و ۱۶ متر و طول آن بین ۲۵ و ۲۶ متر محصور باشد.

از روی این اندازه‌ها فقط معلوم می‌شود که مساحت حیاط بین  $375 = 25 \times 15$  و  $416 = 26 \times 16$  متر مربع محصور است. اگر اندازه‌های تحقیقی طول و عرض حیاط معلوم بود، با يك عمل ضرب می‌توانستیم مساحت صحیح را بدست آوریم. در این مبحث می‌خواهیم قاعده‌هایی بیابیم که به وسیله آن درجه تقریب يك سلسله اعمال را معین کنیم بدون آنکه مجبور باشیم هریک از آنها را تکرار کنیم.

يك سؤال دیگر نیز اینجا پیش می‌آید و آن این است که اگر بخواهیم مساحت حیاط را با تقریب معینی پیدا کنیم، با چه تقریبی باید طول و عرض حیاط را بدانیم.

قبل از آنکه دومی مسئله فوق را بطور دقیق مطرح کنیم، لازم است این تعاریف را در نظر بگیریم:

**۱۹۶ - خطای مطلق** - هرگاه به جای عدد  $A$  مقدار تقریبی آن  $a$  را قرار دهیم تفاضل مقدار واقعی ( $A$ ) و مقدار تقریبی ( $a$ ) را **خطای مطلق** می نامند .

اگر  $a$  کوچکتر از  $A$  باشد،  $a$  مقدار تقریبی نقصانی  $A$  و خطای مطلق مساوی است با  $A - a$  .

اگر  $a$  بزرگتر از  $A$  باشد،  $a$  مقدار تقریبی اضافی  $A$  و خطای مطلق مساوی است با  $a - A$  .

در عمل غالباً  $a$  معلوم است ولی خطای مطلق در دست نیست بلکه فقط معلوم است که خطای مطلق از عددی مانند  $\alpha$  تجاوز نمی کند. این عدد را **حداعلای خطای مطلق** می نامند (در مثال قبل ۲۵ مقدار تقریبی نقصانی طول حیاط و خطای مطلق کوچکتر از یک متر است) .

**۱۹۷ - جهت تقریب** - فرض کنیم  $a$  مقدار تقریبی عدد  $A$  باشد و خطای مطلق که در تعیین  $a$  روی داده از  $\alpha$  کوچکتر باشد ( $\alpha$  حداعلای خطای مطلق است) .

**الف** - اگر  $a$  مقدار تقریبی نقصانی باشد، داریم:  $a < A < a + \alpha$  .

**ب** - اگر  $a$  مقدار تقریبی اضافی باشد، داریم:  $a - \alpha < A < a$  .

**ج** - اگر  $a$  مقدار تقریبی  $A$  باشد ولی معلوم نباشد که این مقدار تقریبی اضافی است یا نقصانی، باید نوشت:  $a - \alpha < A < a + \alpha$  .

در دو حالت (الف) و (ب) مقدار  $A$  محصور بین دو عدد است که تفاضلشان  $\alpha$  است ولی در حالت (ج) مقدار  $A$  محصور بین دو عدد است

که تفاضلشان  $2\alpha$  است . بنابر این اگر جهت تقریب معلوم باشد، فاصله تقریب نصف می شود .

**۱۹۸ - خطای نسبی** - اگر از یک طرف طول راه آهن سرتاسری ایران را با خطایی کمتر از یک متر و از طرف دیگر طول یک تیرنگراف را نیز با خطایی کمتر از یک متر معین کنیم، در هر دو حالت حداعلای خطای مطلق یک متر است ولی با این حال اندازه تقریبی اولی خیلی رضایت بخش تر از دومی است و دقت این دو اندازه گیری اصولاً باهم قابل مقایسه نیستند . برای آنکه دقت اندازه گیری کاملاً واضح شود خطای نسبی را در نظر می گیرند .

**تعریف** - خطای نسبی عبارت است از خارج قسمت خطای مطلق بر مقدار واقعی عدد - اگر  $a$  مقدار تقریبی عدد  $A$  باشد، خطای نسبی عبارت است از  $\frac{A-a}{A}$  یا  $\frac{a-A}{A}$  بر حسب آنکه  $a$  مقدار تقریبی نقصانی یا اضافی باشد.

$$\text{خطای مطلق} = \frac{\text{خطای مطلق}}{A} = \text{خطای نسبی}$$

در عمل، دو جمله این کسر معین نیستند ولی حداعلای خطای نسبی چنین بدست می آید که حد اعلاای خطای مطلق را بر یکی از مقادیر تقریبی نقصانی  $A$  تقسیم کنیم .

**۱۹۹ - دو مسئله اصلی** - در محاسبات تقریبی، چنانکه قبلاً هم

در ضمن مثال اشاره کردیم، دو نوع مسئله مورد پیدا می کند.

**الف** - به فرض معلوم بودن حد اعلاای خطایی که در تعیین هر یک از معلومات یک مسئله روی داده است، می خواهیم حداعلای خطای جواب مسئله را بدست آوریم .

ب - می‌خواهیم بدانیم با چه تقریبی باید اعداد معلوم يك مسئله را اختیار کنیم تا خطایی که در جواب مسئله روی خواهد داد، کوچکتر از مقدار معلومی باشد.

در زیر، مسئله اول را در مورد چهار عمل اصلی حل می‌کنیم و با ذکر چند مثال، طریقه حل مسئله دوم را نشان می‌دهیم و برای این کار، فرض می‌کنیم خوانندگان با محاسبات جبری آشنا باشند و در شماره‌های بعد مقادیر واقعی اعداد را با  $A, B, C$  و ... و مقادیر تقریبی آنها را با  $a, b, c$  و ... و مقادیر جبری خطاهای مطلق نظیر آنها را با  $\alpha, \beta, \gamma$  و ... و بالاخره حد اعلاای این خطاها را بترتیب با  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$  و ... نشان می‌دهیم. مقادیر واقعی و تقریبی اعداد را همواره مثبت فرض خواهیم کرد. از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که  $a = A - \alpha$  و  $b = B - \beta$  و  $c = C - \gamma$  و ممکن است مثبت یا منفی باشند).

۲۰۰ - جمع - داریم:  $a = A - \alpha$  و  $b = B - \beta$  و  $c = C - \gamma$ ، پس اگر  $a + b + c$  را مقدار تقریبی  $A + B + C$  اختیار کنیم، خطای مطلق که روی می‌دهد، عبارت است از:

$$A + B + C - (a + b + c) = A + B + C - (A - \alpha + B - \beta + C - \gamma)$$

$$A + B + C - (a + b + c) = \alpha + \beta + \gamma \quad \text{یا:}$$

$$|A + B + C - (a + b + c)| < |\alpha| + |\beta| + |\gamma| \quad \text{و از آنجا نتیجه می‌شود:}$$

و چون  $\varepsilon$  و  $\varepsilon'$  و  $\varepsilon''$  را حداعلاای خطاهای مطلق  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$  نامیده‌ایم، داریم:

$$|\alpha| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |\beta| < \varepsilon' \quad \text{و} \quad |\gamma| < \varepsilon'' \quad \text{و در نتیجه:}$$

$$A + B + C - |(a + b + c)| < \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon''$$

یعنی حد اعلاای خطای مطلق که در مجموع چند عدد روی می‌دهد، کوچکتر است از مجموع حدود اعلاای خطاهای مطلق مربوط به جمل جمع.

۲۰۱ - تفریق - نظر به قراردادهای قبل می‌توان نوشت:

$$(A - B) - (a - b) = A - B - [A - \alpha - (B - \beta)] = \alpha - \beta$$

$$|(A - B) - (a - b)| < |\alpha| + |\beta| \quad \text{و از آنجا:}$$

$$|(A - B) - (a - b)| < \varepsilon + \varepsilon' \quad \text{یا:}$$

یعنی حد اعلاای خطایی که در مورد تفاضل دو عدد روی می‌دهد، کوچکتر است از مجموع حدود اعلاای خطاهای مطلق مفروق‌منه و مفروق.

۲۰۲ - ضرب - در این مورد نیز داریم:

$$AB - ab = AB - (A - \alpha)(B - \beta) = A\beta + B\alpha - \alpha\beta$$

$$|AB - ab| < A|\beta| + B|\alpha| + |\alpha\beta| \quad \text{و از آنجا:}$$

$$|AB - ab| < A\varepsilon' + B\varepsilon + \varepsilon\varepsilon' \quad \text{ولذا:}$$

و می‌توان عبارت سمت راست را به صورت  $B\varepsilon + (A + \varepsilon)\varepsilon'$  نوشت که همان حد اعلاای خطای حاصل ضرب است.

در عمل، به جای اعداد  $B$  و  $A + \varepsilon$  که مجهولند، اعداد بزرگتری قرار می‌دهند و آنها را طوری انتخاب می‌کنند که محاسبه این حد اعلاا آسانتر شود.

$$\frac{A}{B} - \frac{a}{b} = \frac{A}{B} - \frac{A - \alpha}{B - \beta} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B - \beta)} \quad \text{۲۰۳ - تقسیم - داریم:}$$

$$\left| \frac{A}{B} - \frac{a}{b} \right| < \frac{B|\alpha| + A|\beta|}{B(B - \beta)} \quad \text{و از آنجا:}$$

و به طریق اولی خطای مطلق خارج قسمت از  $\frac{B|\alpha| + A|\beta|}{(B - |\beta|)^2}$  کوچکتر است.

در عمل، برای بدست آوردن حداکثر خطای مطلق خارج قسمت، در صورت کسر اخیر به جای  $A$  و  $B$  اعداد بزرگتر و در مخرج آن به جای  $B - \beta$  عدد کوچکتری قرار می دهند و این اعداد را طوری اختیار می کنند که محاسبه آسانتر شود.

**مثال ۱-** در مجموع  $\pi + \sqrt{2} + \sqrt{3}$  مقادیر تقریبی نقصانی هر يك از جمله ها را تا  $\frac{1}{1000}$  واحد قرار می دهیم؛ می خواهیم بینیم مجموع چگونه تعیین می شود.

مقادیر نقصانی  $\pi$  و  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{3}$  تا  $\frac{1}{1000}$  تقریب بترتیب عبارتند از  $\frac{3}{141}$  و  $\frac{1}{414}$  و  $\frac{1}{732}$ . پس مقدار تقریبی مجموع عبارت است از  $\frac{3}{141} + \frac{1}{414} + \frac{1}{732} = \frac{6}{287}$  و خطای مطلق کوچکتر از  $\frac{3}{1000}$  است. پس می توان نوشت:

$$\frac{6}{287} < \pi + \sqrt{2} + \sqrt{3} < \frac{6}{290}$$

**مثال ۲-** می خواهیم مقدار تقریبی مجموع

$$\pi + \sqrt{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

مقدار  $\frac{1}{4}$  بطور صحیح معلوم و مساوی با  $\frac{5}{8}$  است. حال اگر هر يك از سه جمله دیگر را تا  $\frac{1}{1000}$  واحد (تقریب نقصانی) اختیار کنیم، مجموع تا  $\frac{3}{1000}$  واحد (تقریب نقصانی) و در نتیجه تا  $\frac{1}{1000}$  واحد (تقریب نقصانی) بدست می آید.

$$\left. \begin{array}{l} 0/5000 \\ 0/3333 \\ 1/7320 \\ 3/1415 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5/7068 < x < 5/7071 \\ x = 5/7068 \text{ تا } 0/0001 \text{ واحد (نقصانی)} \\ x = 5/707 \text{ تا } 0/0001 \text{ واحد (اضافی یا نقصانی)} \end{array}$$

$$5/7068$$

**مثال ۳-** می خواهیم مقدار تقریبی  $x = \sqrt{13} - \sqrt{5}$  را تا  $0/01$  واحد حساب کنیم.

مقدار مفروق منه را تا  $0/0001$  واحد (تقریب نقصانی) و مقدار مفروق را تا  $0/0001$  واحد (تقریب اضافی) اختیار می کنیم.

$$\sqrt{13} = 3/606.... \quad \sqrt{13} \text{ تقریباً } = 3/606$$

$$\sqrt{5} = 2/236.... \quad \sqrt{5} \text{ تقریباً } = 2/237$$

$$\sqrt{13} - \sqrt{5} = 1/369 \text{ تقریباً}$$

پس تا  $\frac{2}{1000}$  واحد داریم  $x = 1/369$  و می توان نوشت:

$$1/369 < x < 1/371$$

$$1/36 < x < 1/38 \quad \text{و به طریق اولی}$$

مقدار  $x$  تا  $0/01$  تقریب (نقصانی یا اضافی) مساوی است با  $1/37$ .

**مثال ۴-** می خواهیم مقدار تقریبی  $\pi\sqrt{2}$  را تا  $\frac{1}{1000}$  واحد

$$\sqrt{2} = 1/41421.... \text{ و } \pi = 3/14159.... \text{ می دانیم که}$$

حال مقادیر تقریبی نقصانی  $\pi - \alpha$  و  $\sqrt{2} - \beta$  را که در آنها  $\alpha$  و

$\beta$  خطاهای مطلق مثبت هستند اختیار می کنیم. در این صورت مقدار حاصل

ضرب تقریبی نقصانی است و خطای مطلق عبارت است از:

$$\pi\sqrt{2} - (\pi - \alpha)(\sqrt{2} - \beta) = \alpha\sqrt{2} + \pi\beta - \alpha\beta$$

و این مقدار از  $\alpha\sqrt{2} + \pi\beta$  کوچکتر است. حال باید  $\alpha$  و  $\beta$  را طوری اختیار کنیم که  $\alpha\sqrt{2} + \pi\beta$  از  $\frac{1}{100}$  کوچکتر باشد. برای این کار،  $\pi$  و  $\sqrt{2}$  را با سه رقم اعشاری اختیار می‌کنیم:

$$\pi - \alpha = 3/141 \quad \text{و} \quad \sqrt{2} - \beta = 1/414$$

$$\text{بنابراین داریم: } \alpha < \frac{6}{104} \quad \text{و} \quad \beta < \frac{3}{104} \quad \text{و} \quad \alpha\sqrt{2} + \pi\beta < \frac{186}{105}$$

$$\text{و از طرف دیگر } (\alpha - \pi)(\sqrt{2} - \beta) = 3/141 \times 1/414 = 4/441374$$

$$\text{بنابراین داریم: } 4/441374 < \pi\sqrt{2} < 4/441374 + \frac{186}{105}$$

$$\text{یا: } 4/441374 < \pi\sqrt{2} < 4/443234$$

و مقدار تقریبی  $\pi\sqrt{2}$  تا ۵/۵۱ واحد عبارت است از ۴/۴۴.

**۲۰۴-** درباره خطاهای نسبی می‌توان قضایایی شبیه به آنچه در شماره‌های ۱۹۹ و ۲۰۵ و غیره ذکر کردیم ثابت کرد. ولی خطاهای نسبی در مورد جمع و تفریق بکار نمی‌آید و زیلا آنها را در مورد ضرب و تقسیم پیدا می‌کنیم.

**ضرب -** در شماره ۲۰۲ دیدیم که خطای مطلق که در حاصل ضرب AB روی می‌دهد عبارت است از  $B\alpha + A\beta - \alpha\beta$ ؛ پس خطای نسبی عبارت است از  $\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} - \frac{\alpha\beta}{AB}$ . اما اگر حد اعلا خطاهای نسبی  $\frac{\alpha}{A}$  و  $\frac{\beta}{B}$  را به ترتیب  $\gamma$  و  $\gamma'$  بنامیم، داریم:

$$\left| \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} - \frac{\alpha\beta}{AB} \right| < \left| \frac{\alpha}{A} \right| + \left| \frac{\beta}{B} \right| + \left| \frac{\alpha\beta}{AB} \right|$$

$$\left| \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} - \frac{\alpha\beta}{AB} \right| < \gamma + \gamma' + \gamma\gamma'$$

یا:

بنابر این خطای نسبی حاصل مساوی است با  $\gamma + \gamma' + \gamma\gamma'$ .

**تقسیم -** دیدیم که برای  $\frac{A}{B}$  خطای مطلق عبارت است از  $\frac{B\alpha - A\beta}{B(B - \beta)}$ ؛

پس خطای نسبی مساوی است با  $\frac{B\alpha - A\beta}{B(B - \beta)} \cdot \frac{A}{B}$  یا  $\frac{B}{B - \beta} \left\{ \frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} \right\}$

یا  $\frac{1}{1 - \frac{\beta}{B}} \left\{ \frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} \right\}$  و این مقدار کوچکتر است از:

$$\frac{1}{1 - \frac{\beta}{B}} \left\{ \left| \frac{\alpha}{A} \right| + \left| \frac{\beta}{B} \right| \right\} \quad \text{یا} \quad \frac{\gamma + \gamma'}{1 - \gamma'}$$

پس در موقع تقسیم، خطای نسبی عبارت است از  $\frac{\gamma + \gamma'}{1 - \gamma'}$ .

|      |      |      |      |     |     |     |
|------|------|------|------|-----|-----|-----|
| ۱۷۴۱ | ۱۴۲۹ | ۱۰۸۷ | ۷۶۹  | ۴۶۷ | ۱۹۹ | ۲   |
| ۱۷۴۷ | ۱۴۳۲ | ۱۰۹۱ | ۷۷۳  | ۴۷۹ | ۲۱۱ | ۳   |
| ۱۷۵۳ | ۱۴۳۹ | ۱۰۹۲ | ۷۸۷  | ۴۸۷ | ۲۲۳ | ۵   |
| ۱۷۵۹ | ۱۴۴۷ | ۱۰۹۷ | ۷۹۷  | ۴۹۱ | ۲۲۷ | ۷   |
| ۱۷۷۷ | ۱۴۵۱ | ۱۱۰۳ | ۸۰۹  | ۴۹۹ | ۲۲۹ | ۱۱  |
| ۱۷۸۳ | ۱۴۵۲ | ۱۱۰۹ | ۸۱۱  | ۵۰۳ | ۲۳۳ | ۱۳  |
| ۱۷۸۷ | ۱۴۵۹ | ۱۱۱۷ | ۸۲۱  | ۵۰۹ | ۲۳۹ | ۱۷  |
| ۱۷۸۹ | ۱۴۷۱ | ۱۱۲۳ | ۸۲۳  | ۵۲۱ | ۲۴۱ | ۱۹  |
| ۱۸۰۹ | ۱۴۸۱ | ۱۱۲۹ | ۸۲۷  | ۵۲۳ | ۲۵۱ | ۲۳  |
| ۱۸۱۱ | ۱۴۸۳ | ۱۱۵۱ | ۸۲۹  | ۵۴۱ | ۲۵۷ | ۲۹  |
| ۱۸۲۳ | ۱۴۸۷ | ۱۱۵۳ | ۸۳۹  | ۵۴۷ | ۲۶۳ | ۳۱  |
| ۱۸۳۱ | ۱۴۸۹ | ۱۱۶۳ | ۸۵۳  | ۵۵۷ | ۲۶۹ | ۳۷  |
| ۱۸۴۷ | ۱۴۹۳ | ۱۱۷۱ | ۸۵۷  | ۵۶۳ | ۲۷۱ | ۴۱  |
| ۱۸۶۱ | ۱۴۹۹ | ۱۱۸۱ | ۸۵۹  | ۵۶۹ | ۲۷۷ | ۴۳  |
| ۱۸۶۷ | ۱۵۱۱ | ۱۱۸۷ | ۸۶۳  | ۵۷۱ | ۲۸۱ | ۴۷  |
| ۱۸۷۱ | ۱۵۲۳ | ۱۱۹۳ | ۸۷۷  | ۵۷۷ | ۲۸۳ | ۵۳  |
| ۱۸۷۳ | ۱۵۳۱ | ۱۲۰۱ | ۸۸۱  | ۵۸۷ | ۲۹۳ | ۵۹  |
| ۱۸۷۷ | ۱۵۴۳ | ۱۲۱۳ | ۸۸۳  | ۵۹۳ | ۳۰۷ | ۶۱  |
| ۱۸۷۹ | ۱۵۴۹ | ۱۲۱۷ | ۸۸۷  | ۵۹۹ | ۳۱۱ | ۶۷  |
| ۱۸۸۹ | ۱۵۵۳ | ۱۲۲۳ | ۹۰۷  | ۶۰۱ | ۳۱۳ | ۷۱  |
| ۱۹۰۱ | ۱۵۵۹ | ۱۲۲۹ | ۹۱۱  | ۶۰۷ | ۳۱۷ | ۷۳  |
| ۱۹۰۷ | ۱۵۶۷ | ۱۲۳۱ | ۹۱۹  | ۶۱۳ | ۳۲۱ | ۷۹  |
| ۱۹۱۳ | ۱۵۷۱ | ۱۲۳۷ | ۹۲۹  | ۶۱۷ | ۳۲۷ | ۸۳  |
| ۱۹۳۱ | ۱۵۷۹ | ۱۲۴۹ | ۹۳۷  | ۶۱۹ | ۳۳۷ | ۸۹  |
| ۱۹۳۳ | ۱۵۸۳ | ۱۲۵۹ | ۹۴۱  | ۶۳۱ | ۳۴۹ | ۹۷  |
| ۱۹۴۹ | ۱۵۹۷ | ۱۲۷۷ | ۹۴۷  | ۶۴۱ | ۳۵۳ | ۱۰۱ |
| ۱۹۵۱ | ۱۶۰۱ | ۱۲۷۹ | ۹۵۳  | ۶۴۳ | ۳۵۹ | ۱۰۳ |
| ۱۹۷۳ | ۱۶۰۷ | ۱۲۸۳ | ۹۶۷  | ۶۴۷ | ۳۶۷ | ۱۰۷ |
| ۱۹۷۹ | ۱۶۰۹ | ۱۲۸۹ | ۹۷۱  | ۶۵۳ | ۳۷۳ | ۱۰۹ |
| ۱۹۸۷ | ۱۶۱۳ | ۱۲۹۱ | ۹۷۷  | ۶۵۹ | ۳۷۹ | ۱۱۳ |
| ۱۹۹۳ | ۱۶۱۹ | ۱۲۹۷ | ۹۸۳  | ۶۶۱ | ۳۸۳ | ۱۲۷ |
| ۱۹۹۷ | ۱۶۲۱ | ۱۳۰۱ | ۹۹۱  | ۶۷۳ | ۳۸۹ | ۱۳۱ |
| ۱۹۹۹ | ۱۶۲۷ | ۱۳۰۳ | ۹۹۷  | ۶۷۷ | ۳۹۷ | ۱۳۷ |
|      | ۱۶۳۷ | ۱۳۰۷ | ۱۰۰۹ | ۶۸۳ | ۴۰۱ | ۱۳۹ |
|      | ۱۶۵۷ | ۱۳۱۹ | ۱۰۱۳ | ۶۹۱ | ۴۰۹ | ۱۴۹ |
|      | ۱۶۶۳ | ۱۳۲۱ | ۱۰۱۹ | ۷۰۱ | ۴۱۹ | ۱۵۱ |
|      | ۱۶۶۷ | ۱۳۲۷ | ۱۰۲۱ | ۷۰۹ | ۴۲۱ | ۱۵۷ |
|      | ۱۶۶۹ | ۱۳۳۱ | ۱۰۳۱ | ۷۱۹ | ۴۳۱ | ۱۶۳ |
|      | ۱۶۹۳ | ۱۳۳۷ | ۱۰۳۳ | ۷۲۷ | ۴۳۳ | ۱۶۷ |
|      | ۱۶۹۷ | ۱۳۳۳ | ۱۰۳۹ | ۷۳۳ | ۴۳۹ | ۱۷۳ |
|      | ۱۶۹۹ | ۱۳۸۱ | ۱۰۴۹ | ۷۳۹ | ۴۴۳ | ۱۷۹ |
|      | ۱۷۰۹ | ۱۳۹۹ | ۱۰۵۱ | ۷۴۳ | ۴۴۹ | ۱۸۱ |
|      | ۱۷۲۱ | ۱۴۰۹ | ۱۰۶۱ | ۷۵۱ | ۴۵۷ | ۱۹۱ |
|      | ۱۷۲۳ | ۱۴۲۳ | ۱۰۶۳ | ۷۵۷ | ۴۶۱ | ۱۹۳ |
|      | ۱۷۲۳ | ۱۴۲۷ | ۱۰۶۹ | ۷۶۱ | ۴۶۳ | ۱۹۷ |

## مسائل مختلف

این مسائل از طرف سازمان کتابهای درسی ایران

تهیه شده است

۱ :

الف - کدامند میناهای  $B$  از دستگاههای شماری که در آن دستگاهها بتوان عددی مانند  $N = mcd u$  یافت بقسمی که چهار رابطه زیر تماماً برقرار باشند :

$$m = u = 1, \quad c = d^2 \quad \text{و} \quad \overline{cm} = \overline{ud} (B - d)$$

ب - ثابت کنید که با هر کدام از این میناها رابطه زیر برقرار است :

$$\overline{mc} + \overline{du} = B$$

ج - مینای  $B$  را بقسمی تعیین کنید که در آن مینا رابطه :

$$\overline{mc} + \overline{du} = \frac{B^2}{2}$$

برقرار باشد ؛ پس از تعیین مقدار  $B$  عدد  $N$  نظیر آن را معین سازید .

الف -  $B = d^2 + 1$  ، عدد غیر مشخص  
ج -  $B = 10$  ،  $N = 1931$

۲- عددهای چهار رقمی و مجذور کامل  $N = mcd u$  را بقسمی

بیاید که  $\overline{mc}$  و  $\overline{du}$  دو عدد صحیح متوالی باشند .

(تنها جواب :  $N = 91^2 = 8281$ )

۳- دو عدد بیاید که هر دو مجذور کامل و مجموعشان  $148392$  باشد .

(جواب :  $306^2 = 93636$  و  $547^2 = 299169$ )

۴- عددهای صحیح چهار رقمی  $N = mcd u$  را بقسمی تعیین کنید که

این دو رابطه تماماً برقرار باشند :

$$\overline{m+c+d+u} = \overline{mc}$$

$$\overline{md} + \overline{cu} = 2(\overline{mc} + \overline{du}) - ۱ \quad \text{و}$$

(تنها جواب :  $N=۱۹۳۶$ )

۵- عدد چهار رقمی و مجذور کامل  $N = \overline{mcd u}$  را بقسمی تعیین کنید که داشته باشیم :

$$۱۰۰\sqrt{N + \overline{mc} + \overline{du} + \overline{mcd u}} = \overline{udcm}$$

(جواب :  $N=۱۹۳۶$ )

۶- عدد صحیحی دو رقمی بیابید بطوری که تفاضل مکعبات ارقامش مساوی با دو برابر آن عدد باشد .

(جواب : ۱۳)

۷- عدد مقسوم علیه‌های عدد  $N = \overline{mcd u}$  فرد است . در صورتی که بدانیم رقمهای  $d$  ،  $u$  و  $c$  جمل متوالی يك تصاعد حسابی و رقمهای  $m$  ،  $d$  و  $c$  جمل متوالی يك تصاعد هندسی هستند، عدد  $N$  را تعیین کنید .

(جواب :  $N=۱۹۳۶$ )

۸- عدد سه رقمی  $n$  را در دستگاه شمار اعشاری در نظر می‌گیریم و رقمهای صدها و دهها و یکهای این عدد را بترتیب با  $a$  ،  $b$  و  $c$  نمایش می‌دهیم . در تمام مراحل زیر فرض می‌کنیم  $a > c$  و  $a = c + u$  ( $u > 0$ ) . در عدد  $n$  جای دو رقم یکها و صدها را که با هم عوض کنیم ، عدد دیگری حاصل می‌شود که آن را با  $n'$  و  $n - n'$  را با  $D$  نمایش می‌دهیم .

الف -  $D$  را بر حسب  $u$  حساب کنید .

ب - آیا ممکن است عدد  $D$  مجذور يك عدد صحیح باشد ؟

ج - ثابت کنید که اگر داشته باشیم :  $a + c = b$  ، ممکن نیست که  $n$  و  $D$  نسبت به هم اول باشند .

د - عدد  $n$  را که با  $D$  اول باشد بقسمی در نظر می‌گیریم که داشته باشیم :  $a = b + c$  ( $b \neq 0$ ) . در این صورت  $b$  و  $c$  در چه شرایطی صدق می‌کنند ؟ اگر در عدد  $n$  جای دو رقم یکها و دهها را با هم عوض کنیم، عدد دیگری بدست می‌آید که آن را  $n_1$  می‌نامیم . ثابت کنید که  $n_1$  عیناً همان خواص  $n$  را دارد . مثالهایی از این نوع عددهای  $n$  بنویسید و بخصوص بین این نوع عددهای  $n$  بزرگترین و کوچکترین آنها را تعیین کنید .

الف -  $D = ۹۹u$  ، ب - ممکن نیست ،

د - شرایط  $b + c : c$  با  $b + c$  اول است و  $b$  با  $c$  اول است .  
مثالهایی از عدد  $n$  :

$$n = (۷۵۲ \text{ و } ۷۲۵) , (۷۶۱ \text{ و } ۷۱۶) , (۸۵۳ \text{ و } ۸۳۵) , (۵۲۳ \text{ و } ۵۳۲) , (۵۴۱ \text{ و } ۵۱۴) , (۷۴۳ \text{ و } ۷۳۴) , (۴۳۱ \text{ و } ۴۱۳)$$

جوابها

بزرگترین مقدار  $n$  :  $n = ۸۷۱$  .

کوچکترین مقدار  $n$  :  $n = ۲۱۱$  .

۹- کسر  $y = \frac{n^2 + ۹n^2}{n^2 - ۱}$  که در آن  $n$  نمایش عدد صحیحی بزرگتر از ۱ است داده می‌شود .

از ۱ است داده می‌شود .

الف - آیا عدد  $y$  ممکن است عددی صحیح باشد ؟

ب - به ازای چه مقادیری از  $n$  کسر داده شده ممکن التحویل است ؟

ج - اگر به ازای مقداری از  $n$  کسر داده شده غیر ممکن التحویل باشد، این کسر مولد چه نوع عدد اعشاری ممکن است باشد ؟

الف -  $y$  نمی‌تواند عدد صحیح باشد . ب - باید رقم یکان  $n$  عددی فرد و یا عدد ۶ باشد . ج - اگر رقم یکان  $n$  مساوی با ۵ یا ۲ یا ۸ باشد ،  $y$  مولد عدد اعشاری متناوب ساده است ؛ اگر رقم آحاد  $n$  مساوی با ۴ باشد ،  $y$  مولد عدد اعشاری متناوب مرکب است . در این حالت :  $۱ - (مضرب ۵ \times) = n$  و عدد ارقام غیر گردش برابر با  $x$  است .

جوابها

۱۰- عدد شش رقمی  $N$  را بقسمی تعیین کنید که حاصل ضربهای آن عدد در ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ از همان شش رقم عدد  $N$  تشکیل شده باشند .

(جواب :  $N=۱۴۲۸۵۷$ )

۱۱- عددی تعیین کنید که مساوی با سه برابر مکعب مجموع ارقام خودش باشد .

(جواب :  $۱۳۹۹۶۸$  و  $۵۹۰۴۹$ )

۱۲- دو کسر متعارفی پیدا کنید که صورتهای هر دو آنها عدد ۱ باشد و

۱۸- سه عدد چهاررقمی و مجذور کامل جنان بیایید. ۴۱۰۰۰ م آنها ۷۸۳۸ بوده و دوتای آنها دو مجذور کامل متوالی باشند.

١٩- كسر غير ممكن التحويل وكو حكر از واحد  $\frac{p}{q}$  را حثان زيبين، اهد

(جواب :  $\frac{p}{q} = \frac{6029}{9225}$ )

[ جواب :  $N = \frac{1}{9}(10^n - 1)$  ، مضرب صحیح ۴۲ ]

$$m \times c \times d \times u = (c - d)^r$$

۲۲- ثابت کنید که اگر  $n$  عددی فرد باشد، عبارت :

بر حاصل جمع :

قابل قسمت است .

اولا - دو عدد صحیح و مثبت  $x$  و  $y$  را چنان تعیین کنید که در رابطه :

صدق کنند .

(جواب :  $\frac{1}{239}$  و  $\frac{1}{4649}$ )

(جواب : ۱۹۳۵ =  $\overline{abcd}$ )

[تنها جواب:  $\overline{\text{medu}} = 1936 = (44)^2$ ]

۱۶- عدد چهاررقمی  $\overline{mcdn}$  را بقسمی تعیین کنید که داشته باشیم :

$$c \times u = \overline{(c-d)d}$$

[جواب : ۱۹۳۷ = mcd u]

(۲) عدد ۴۸ را در وسط رقمهای  $A_4$  می نویسیم تا عدد  $A_3$  به این صورت بدست آید:  $A_3 = 444889$ .

(۳) عدد ۴۸ را در وسط رقمهای  $A_7$  می نویسیم تا عدد  $A_8$  بدین صورت تشکیل شود:  $A_8 = 44448889$ .

و به همین ترتیب عددهای بعدی  $A_8, A_6, \dots, A_n$  را تشکیل

می‌دهیم .  
اولاً - ثابت کنید که تمام عددهای  $A_n$  ( $n=1, 2, 3, 4, \dots$ )  
مجدور کامل هستند .

ثانیاً - قاعده‌ای کلی برای تعیین جذر اعداد  $A_n$  پیدا کنید .

$$[A_n \text{ جذر} = \frac{1}{3}(2 \times 10^n + 1) : \text{جواب}]$$

ثانیاً - دو عدد صحیح مثبت  $x$  و  $y$  را چنان تعیین کنید که در رابطه:

$$(۲) \quad 2x^2 + xy - 2y^2 = p$$

عدد  $p$  مقدار ثابتی باشد. در این حالت مسئله در صورتی ممکن است که رقم یکان عدد  $p$  مقدار ثابتی به آن را تعیین خواهید کرد داشته باشد؛ پس از تعیین این مقدار ثابت، معادله (۲) را وقتی که  $p$  بین دو عدد ۴۰ و ۵۰ واقع باشد حل کنید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{اولاً - } x = p + ۱:۲, y = p - ۱:۲ \\ \text{ثانیاً - } x = p + ۳:۵, y = p - ۲:۵ \\ \text{حالت شرط امکان مسئله این است که داشته باشیم:} \\ ۷ = \text{رقم یکان } p. \text{ جوابهای مطلوب برای معادله} \\ (۲): x = ۱۰, y = ۹, p = ۴۷ \end{array} \right\} \text{ جوابها}$$

۲۴- عدد چهاررقمی  $N = \overline{medu}$  را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\overline{du} = ۲ \times \overline{mc}$$

$$\overline{um} = k^۲ \quad \text{و}$$

(هشت جواب: ۱۹۳۸، ۱۵۳۰، ۱۴۲۸، ۱۰۲۰، ۴۸۹۶، ۴۵۹۰، ۴۳۸۶، ۴۰۸۰)

۲۵- عددی چهار رقمی و مجذور کامل چنان بیابید که مساوی باشد با

مجموع یازده عدد مجذور کامل متوالی.

تحقیق کنید که عددی که یافته‌اید در عین حال به دو طریق مختلف مساوی است با حاصل جمع سه عدد صحیحی که هر سه مجذور کاملند.

مقدار  $N$  عدد مطلوب چنین است:

$$\left. \begin{array}{l} N = ۷۷^۲ = ۱۸^۲ + ۱۹^۲ + \dots + ۲۷^۲ + ۲۸^۲ = ۵۹۲۹ \\ N = ۲۲^۲ + ۳۳^۲ + ۶۶^۲ \\ N = ۱۴^۲ + ۴۲^۲ + ۶۳^۲ \end{array} \right\} \text{ جوابها}$$

توجه کنید! برای قسمت آخر مسئله ۲۵ علاوه بر دو جواب نامبرده

در بالا جوابهای زیر را نیز می‌توان ذکر کرد:

$$\begin{aligned} N &= ۳^۲ + ۱۲^۲ + ۷۶^۲ = ۳^۲ + ۳۶^۲ + ۶۸^۲ \\ &= ۴^۲ + ۲۷^۲ + ۷۲^۲ = ۵^۲ + ۴۸^۲ + ۶۰^۲ \\ &= ۱۲^۲ + ۳۲^۲ + ۶۹^۲ = ۱۲^۲ + ۳۶^۲ + ۶۷^۲ \\ &= ۱۲^۲ + ۴۸^۲ + ۵۹^۲ = ۱۳^۲ + ۲۴^۲ + ۷۲^۲ \\ &= ۲۴^۲ + ۲۷^۲ + ۶۸^۲ = ۲۷^۲ + ۴۰^۲ + ۶۰^۲ \\ &= ۳۲^۲ + ۴۸^۲ + ۵۱^۲ = ۴۰^۲ + ۴۵^۲ + ۴۸^۲ \\ &= ۴۲^۲ + ۴۲^۲ + ۴۹^۲ \end{aligned}$$

## مسائل امتحانات نهایی\*

۱- عددی در مبنای  $x$  به صورت  $\overline{3a}$  و در مبنای  $x - ۲$  به صورت  $a۳$  نوشته شده است؛  $a$  و  $x$  را حساب کنید.

۲- کوچکترین عدد صحیحی را پیدا کنید که بین مربع آن و ۵۰۰ واحد کمتر از این مربع، مجذوری از عدد صحیح وجود نداشته باشد.

۳- کسر تحویل ناپذیر  $\frac{a^۳}{b^۳} < ۱$  مولد عدد اعشاری متناوب ساده‌ای است که دوره تناوبش سه رقمی است؛ این کسر را پیدا کنید.

۴- ثابت کنید اگر یک عدد دورقمی راسه برابر کرده و حاصل ضرب را ارقام سمت چپ آن عدد دو رقمی قرار دهیم، عدد حاصل بر ۷ و ۴۳ قابل قسمت است.

۵- عدد چهار رقمی  $\overline{medu}$  را طوری تعیین کنید که در رابطه زیر صدق کند:

$$\overline{medu} = \overline{mc} (\overline{mc} + \overline{du})$$

۶- اولاً کوچکترین عددی را پیدا کنید که چون با ۲ جمع شود مضرب ۱۱ و چون با ۵ جمع شود مضرب ۱۳ شود.

ثانیاً کوچکترین عددی را پیدا کنید که مضرب ۲۱ بوده و باقیمانده تقسیم آن بر ۱۱ و ۱۳ به ترتیب اعداد ۵ و ۲ باشد. (خرداد ۱۳۴۴)

۱- حاصل جمع دو عدد  $۴(۲۱۰۲)$  و  $۸(۵۴۲)$  را در مبنای ۱۰ حساب کنید.

۲- بزرگترین عدد صحیح را تعیین کنید که باقیمانده تقسیم آن بر عدد ۴۲ مساوی  $\frac{۶}{۵}$  خارج قسمت تقسیم گردد.

۳- اولاً - ثابت کنید حاصل ضرب چهار عدد صحیح متوالی مضرب ۲۴ است.

\* مسائل امتحانات نهایی عیناً به صورت اصلی در این کتاب آورده می‌شود.

ثانیاً - عددی پنج رقمی به صورت  $N = \overline{aboab}$  تعیین کنید که مساوی حاصل ضرب چهار عدد متوالی گردد.

۴ - ثابت کنید در ازای جمیع مقادیر صحیح  $a$  کسر  $\frac{9a+7}{15a+12}$  تحویل ناپذیر است سپس مقدار  $a$  را طوری تعیین کنید تا کسر به عدد اعشاری  $0.592592592 \dots$  تبدیل گردد.

۵ - مطلوب است محاسبه اضلاع مثلث قائم الزاویه‌ای که اعداد صحیح باشند و بدانیم مقدار عددی مساحت و محیط مثلث با هم مساوی هستند.  
(شهریور ۱۳۴۴)

۱ - سلسله طبیعی اعداد صحیح از يك تا عدد چهار رقمی  $N$  و خود این عدد را بدون جدا کردن ارقام در پی یکدیگر نوشته‌ایم، مجموع ارقامی که بکار رفته مضربی از عدد  $N$  است. مطلوب است محاسبه عدد  $N$ .

۲ - عددی در مبنای ۷ (هفت) و ۱۱ (یازده) دارای سه رقم نمایش آن در این دو مبنا عکس ترتیب هم هستند. مطلوب است تعیین عدد در این دو مبنا و در مبنای ۱۰ (ده).

۳ - اعداد چهار رقمی  $A = \overline{medu}$  و  $B = \overline{udcm}$  ( $m > u$ ) مفروض است؛ ثابت کنید مجموع این دو عدد مضرب یازده (۱۱) و تفاضل آنها مضرب ۹ می‌باشد. و در صورتی که هر دو عدد  $A$  و  $B$  مجذور کامل باشند آنها را محاسبه کنید.

۴ - مطلوب است تعیین دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  بطوری که نسبت آنها  $\frac{9}{13}$  و اگر حاصل ضرب دو عدد را با کوچکترین مضرب مشترکشان جمع کنیم حاصل برابر ۱۴۰۴ گردد.

۵ - کسر  $\frac{(n^2-1)}{1+7^n}$  مفروض است.

۱ - ثابت کنید در صورتی که  $n$  عدد فرد باشد کسر فوق تحویل پذیر است (ثابت کنید صورت و مخرج مضرب ۸ هستند).

۲ - در ازای  $n = 3$  کسر متعارفی بدست می‌آید. کسرهای معادل این کسر را تعیین کنید که مجموع صورت و مخرج آنها عدد ۴۸۴ را عا کنند (بشمارند).  
(خرداد ۱۳۴۵)

۱ - عددی در مبنای ۳ با چهار رقم مساوی و در مبنای ۷ با دو رقم مساوی دیگر نوشته می‌شود یعنی  $(\overline{yy})_7 = (\overline{xxxx})_3$ ؛ عدد را در این دو مبنا و در مبنای ۱۰ تعیین کنید.

۲ - مطلوب است تعیین تمام اعداد صحیح مانند  $N$  بطوری که  $(3N+2)$  بر ۲۳ قابل قسمت باشد. اگر  $N$  عددی دو رقمی باشد، مقادیر آن را نیز حساب کنید.

۳ - ثابت کنید در ازای جمیع مقادیر صحیح و مثبت  $n$ ، عدد  $A$  بر ۱۹ قابل بخش است:

$$A = 7^{2n+2} + 7^{3n+1} + 1$$

۴ - اعداد چهار رقمی

$$B = \overline{udcm} \text{ و } A = \overline{medu}$$

مفروضند؛ ثابت کنید اگر عدد  $A$  مضربی از ۱۱ باشد، عدد  $B$  نیز مضربی از ۱۱ خواهد بود.

۵ - ثابت کنید مجذور هر عدد اول (غیر از ۳ و ۲) را می‌توان به صورت مضربی از ۲۴ به اضافه یک نوشت.

۶ - کسر  $\frac{a+13}{a-2}$  مفروض است ( $a$  عددی است صحیح و مثبت):

الف - تعیین کنید در ازای چه مقادیری از  $a$ ، کسر فوق، به عدد صحیح تبدیل می‌شود.

ب - مقادیر  $a$  را آنطور تعیین کنید که خارج قسمت تقریبی کسر فوق تا  $0.1$  تقریب، برابر  $1/8$  گردد.  
(شهریور ۱۳۴۵)

۱ - مطلوب است محاسبه ارقام  $x$  و  $y$  بطوری که:

$$(\overline{xy})_7 + (\overline{xy})_5 = (\overline{xy})_{10}$$

۲ - عدد  $A = 99 \dots 99$  ( $n$  رقمی با ارقام مساوی ۹) مفروض است؛ ثابت کنید مجموع ارقام عدد  $A^2$  برابر  $9n$  است.

۳ - باقیمانده تقسیم عدد  $10^n$  را بر اعداد ۶ و ۱۱ در ازای جمیع مقادیر صحیح و مثبت  $n$  حساب کنید.

۴- عدد چهاررقمی  $N = \overline{mcd u}$  را با معلوم بودن روابط زیر تعیین کنید .

$$\begin{cases} \overline{mcd u} = \overline{mm} + \overline{cc} + \overline{uu} \\ \overline{mcd u} = 7 \text{ (مضرب)} \end{cases}$$

۵- کوچکترین عدد چهار رقمی را طوری تعیین کنید که باقیمانده تقسیم آن بر هر يك از اعداد ۵۶ و ۷۵ و ۹۸ برابر عدد ۷ باشد.

۶- عدد غیر اول  $N$  و  $p$  تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد  $N$  معلوم است : ثابت کنید عدد  $A = N^p$  مجذور کامل است .

۷- دو کسر متعارفی طوری تعیین کنید که بترتیب معادل کسر مولد اعداد اعشاری  $0/272727 \dots$  و  $0/8333 \dots$  باشند و بدانیم مجموع مخرجهای آن دو کسر دو برابر مجموع صورتهاشان باشد - دو کسر کوچکتر که جواب هستند پیدا کنید. (خرداد ۱۳۴۶)

۱- عددی از سه رقم زوج متوالی تشکیل شده است ؛ ثابت کنید که تفاضل این عدد و عددی که با همان ارقام ولی بعکس نوشته شده باشد، همواره مساوی با (۳۹۶) است .

۲- مطلوب است مقدار  $x$  در صورتی که بدانیم  $(36)_x = (110)_x$  .  
۳- ثابت کنید  $a^5 + a^4 - a^3 - a^2$  به ازای جمیع مقادیر  $a$  ، بر (۱۲) قابل قسمت است .

۴- کوچکترین عددی را بیابید که دارای (۵) مقسوم‌علیه باشد؛ سپس ثابت کنید این عدد ، مجذور کامل است .

۵- ثابت کنید اولاً کسر  $\frac{3m+4}{5m+7}$  به ازای جمیع مقادیر  $m$  تحویل ناپذیر است؛ ثانیاً مقدار  $m$  را چنان معین کنید که کسر فوق ، معادل کسر متناوب مرکب  $0/583333 \dots$  باشد.

۶- ثابت کنید هیچ عدد سه رقمی نمی‌توان یافت که در این رابطه

$$\overline{cd u} = \overline{c(c+du)}$$

صدق کند .

۷- اگر اندازه طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای عدد صحیح بوده بین هم اول باشند ، ثابت کنید یکی از اضلاع مجاور به زاویه قائمه آن، مضربی از (۴) است .

۸- می‌دانیم نمره اتوموبیلها چهار رقمی است که در آنها صفر بکار نرفته است ؛ معلوم کنید در هر سری (نمره گذاری) چند نمره اتوموبیل (پلاك) وجود دارد . (شهریور ۱۳۴۶)

۱- اولاً - دو عدد  $11(73)$  و  $6(201)$  را از پایه‌های ۱۱ و ۶ به پایه ۹ بیاورید .

ثانیاً - حاصل ضرب  $7 = 4(88) \times 4(81)$  را در پایه ۹ بدست آورید (عملیات قسمت ثانیاً در پایه ۹ انجام شود) .

۲- مطلوب است تعیین عددی چهار رقمی به صورت  $N = \overline{mcd u}$  که ارقام آن در روابط :  $10\overline{mc} = \overline{uc} + \overline{cc}$  و  $\overline{cd} = 4(c+u)$  صدق کنند .

۳- ثابت کنید عبارت  $7 + 6^{2n-1}$  به ازای مقادیر صحیح  $n > 0$  بر ۴۳ بخش پذیر است .

۴- اولاً - دو عدد طوری تعیین کنید که مجموعشان ۱۶۸ و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکشان ۲۸ باشد .

ثانیاً - کوچکترین عددی را تعیین کنید که مضرب ۷ بوده و چون آن را در ۶ ضرب کنیم ، دارای ۳۵ مقسوم‌علیه گردد .

۵- کسر  $F(n) = \frac{n-1}{n+9}$  که در آن،  $n$  عدد صحیح و مثبت می‌باشد مفروض است .

اولاً - ثابت کنید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو جمله کسرهایی که به ازای مقادیر مختلف  $n$  در  $F(n)$  حاصل می‌شوند، حداکثر ۱۵ می‌تواند باشد .

ثانیاً - اگر کوچکترین مضرب مشترك دو جمله یکی از کسرهای حاصل از  $F(n)$  برابر ۱۶۸ باشد ، مقدار  $n$  را محاسبه کنید.

ثالثاً  $n$  را چنان تعیین کنید تا  $F(n)$  مولد کسر اعشاری متناوب مرکب ...  $۰/۱۶۶۶$  شود .

رابعاً - مقدار  $n$  را طوری تعیین کنید که جذر تقریبی نقصانی حاصل ضرب دو جمله کسر  $F(n)$  تا  $۰/۱$  واحد ، مساوی  $۴/۸$  شود .

(خرداد ۱۳۴۷)

۱- اولاً از رابطه:  $(۶۵۲۶)_n = (۳۲)_n \times (۲۰۳)_n$  مقدار  $n$  را حساب کنید .

ثانیاً - حاصل تفریق :  $(۳۲)_۷ - (۲۰۳)_۷$  را در پایه ۷ بدست آورید (تفریق در پایه ۷ انجام شود) .

ثالثاً - عدد  $(۱۴۱)_۷$  را از پایه ۷ به پایه ۵ بیاورید .

۲- مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید تا عدد  $۳a۲b۴$  بر ۸ و ۹ بخش پذیر باشد .

۳- مطلوب است تعیین کوچکترین عددی که چون با ۳ جمع شود، بر اعداد ۱۵ و ۱۸ و ۲۵ و ۲۷ قابل قسمت شود .

۴- اولاً - دو عدد ۱۱۰۲۵ و ۵۲۵ را به عوامل اول تجزیه کنید .  
ثانیاً - نشان دهید که عدد بزرگتر بر عدد کوچکتر قابل تقسیم است و خارج قسمت را مشخص کنید (بدون انجام عمل تقسیم) .

ثالثاً - شماره مقسوم علیه‌های عدد ۱۱۰۲۵ را بدست آورید .

۵- سه عدد صحیح و مثبت  $a$  و  $b$  و  $c$  که دو دو نسبت به هم اولند مفروض است .

اولاً- تحقیق کنید کسر  $(\frac{a}{b} + \frac{b}{c})$  تحویل ناپذیر است .

ثانیاً- به فرض آنکه  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = \frac{۱۴}{۱۵}$  باشد، کسرهای  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{b}{c}$  را مشخص کنید ( $a$  و  $b$  و  $c$  را حساب کنید) .

ثالثاً - بدون آنکه صورت کسرهای  $\frac{۳}{۵}$  و  $\frac{۱}{۳}$  و  $\frac{۱۴}{۱۵}$  را بر مخرجشان تقسیم کنید تحقیق کنید که یکی از آنها کسر اعشاری تحقیقی و دو تای دیگر

یکی مولد کسر اعشاری متناوب ساده و دیگری مولد کسر اعشاری متناوب مرکب است .

رابعاً -  $a$  را طوری تعیین کنید تا کسر  $\frac{a-۵}{a+۱۱}$  مولد کسر اعشاری متناوب مرکب  $۰/۹۳۳۳....$  شود .

خامساً - جذر تقریبی نقصانی کسر  $\frac{۱۴}{۱۵}$  را تا  $\frac{۱}{۱۰۰}$  واحد حساب کنید .

(شهریور ۱۳۴۷)

۱- در يك عدد سه رقمی ، اگر جای دو رقم یکان و دهگان را با هم تغییر دهیم ، براین عدد ۳۶ واحد افزوده می‌شود و اگر جای دو رقم دهگان و صدگان را با هم عوض کنیم ، از عدد مفروض ۲۷۰ واحد کم می‌شود ؛ تعیین کنید اگر جای دو رقم یکان و صدگان را باهم عوض کنیم، چه تغییر در عدد حاصل می‌شود ؟

۲- در يك تقسیم، ۵۲ واحد بر مقسوم و ۴ واحد بر مقسوم علیه افزوده ام خارج قسمت و باقیمانده تقسیم تغییر نکرده است؛ خارج قسمت را تعیین کنید .

۳- اولاً- ثابت کنید اگر بر حاصل ضرب چهار عدد صحیح متوالی، ۱! واحد افزوده شود ، حاصل مربع کامل است ؛ و از آن نتیجه بگیرید در ۵! دستگاه شمار به مبنای ۳  $x > ۳$  رابطه زیر برقرار است :

$$10 \times 11 \times 12 \times 13 + 1 = (131)^2$$

ثانیاً- چهار عدد صحیح متوالی تعیین کنید که حاصل ضرب آنها ۷۳۴۴۰ گردد .

۴-  $P$  عددی است صحیح و مثبت و  $n > ۱$  نیز عدد صحیح است . اعداد  $a = P \cdot n$  و  $b = P \cdot (n - ۱)$  را در نظر می‌گیریم .

اولاً- ثابت کنید بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد  $a$  و  $b$  با تفاضل این دو عدد برابر است و برعکس، اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد  $a$  و  $b$  با تفاضل آن دو برابر باشد ، این اعداد را می‌توان به صورت  $a = P \cdot n$  و  $b = P \cdot (n - ۱)$  نوشت ( $P$  و  $n$  اعداد صحیحند) .

ثانیاً - دو عدد مثبت چنان تعیین کنید که بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها با تفاضلشان برابر بوده و بدانیم کوچکترین مضرب مشترک آنها (۳۰) می باشد (مسئله چند جواب دارد).

۵- اعدادی تعیین کنید که بر  $a$  بخش پذیر بوده و جذر تقریبی آنها تا يك واحد تقریب برابر  $a$  باشد. (در حالت خاصی که  $a=27$  باشد، جوابهای مسئله را نیز بدست آورید).

۶- کسر  $\frac{x}{y}$  که در آن  $5x - 2y = 1$  می باشد، مفروض است:

اولاً- شکل عمومی کسرهایی که  $\frac{x}{y}$  را بنویسید ( $x$  و  $y$  بر حسب يك پارامتر تعیین شود).

ثانیاً- اگر  $\frac{x}{y} = \frac{4n+1}{5n+1}$  باشد، بیان کنید که به ازای جمیع مقادیر صحیح  $n$  این کسر تحویل ناپذیر است.

ثالثاً- اعداد صحیح  $n$  را طوری تعیین کنید که این کسر قابل تبدیل به کسر اعشاری تحقیقی گردد.

« هر يك از قسمتهای مسائل را می توان مستقلاً هم حل کرد ».

(خرداد ۱۳۴۸)

۱- مجموع دو عدد ۱۴۸؛ اگر آنها را مقلوب کرده (به عکس ترتیب نوشته) و با هم جمع کنیم، حاصل جمع ۵۵۳ خواهد شد. این دو عدد را تعیین کنید.

۲- در يك تقسیم باقیمانده ۲۳۷۴ و خارج قسمت ۲۳ می باشد. در مقابل هر واحدی که به مقسوم اضافه می کنیم، يك واحد نیز به مقسوم علیه می افزاییم. تعیین کنید حداکثر چند واحد می توان به مقسوم و مقسوم علیه اضافه کرد بدون اینکه خارج قسمت تغییر کند.

۳- يك عدد شش رقمی که در مبنای هفت نوشته شده از سمت چپ با رقم ۱ شروع می شود. اگر این رقم را به سمت راست سایر ارقام منتقل کنیم، عدد

حاصل سه برابر عدد مفروض (در مبنای هفت) خواهد شد. این عدد را تعیین کنید (کلیه عملیات را در مبنای هفت انجام دهید).

۴- ثابت کنید اگر  $n$  مضرب سه نباشد، عدد:

$$N = 17^{2n} + 17^n + 1$$

بر ۳۰۷ بخش پذیر است.

۵- دو عدد تعیین کنید که تفاضل کوچکترین مضرب مشترک آن دو و بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان ۲۴۷ باشد.

۶- کسر  $\frac{2n-9}{n+5}$  مفروض است.

۱- تحقیق کنید اگر  $n$  يك عدد صحیح و بزرگتر از سه باشد، دو جمله کسر مقسوم علیه مشترک اولی جز ۲ و ۳ نخواهند داشت.

۲- مقادیر  $n$  را طوری تعیین کنید که کسر فوق به عدد صحیح تبدیل گردد.

۳- در حالتی که  $n=13$  باشد، کسر معادل کسر فوق تعیین کنید که مجموع مربعات دو جمله آن برابر (۱۸۱۸۶) باشد.

۴- مقدار  $n$  را طوری تعیین کنید که جذر تقریبی نقصانی کسر  $\frac{3n-9}{n+5}$

تایك صدم تقریب برابر  $1/38$  گردد.

(شهریور ۱۳۴۸)

۱- در يك تفریق، مجموع سه جمله (مفروق منه و مفروق و باقیمانده) ۱۱۱۰ می باشد؛ اگر از مفروق منه ۱۶۱ واحد کم کنیم، باقیمانده نصف می شود؛ سه جمله این تفریق را بدست آورید.

۲- در يك تقسیم، مقسوم ۵۴۲ و خارج قسمت ۱۲ می باشد؛ تعیین کنید مقسوم علیه و باقیمانده چه مقادیری می توانند اختیار کنند (چهار جواب).

۳- اولاً - کلیه مقسوم علیه های ۲۱۶ را بنویسید.

ثانیاً - اعداد صحیح  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها ( $D$ ) و کوچکترین مضرب مشترک آنها  $M$  در رابطه:  $M - 3D = 216$  صدق کنند  $10 < D < 15$ .

مساوی ۱۴۰ می باشد؛ عدد برگزیده را حساب کنید.

۴- عدد صحیح ۱۱ را چنان تمهین کنید که مجموع ارقام عدد :

$\Lambda = 10^{2n} - 10^n$  برابر ۲۲۴ باشد .

۵- تفاضل دو عدد برابر ۷۳ است و می دانیم حاصل ضرب آنها مجذور کامل است ؛ آن دو عدد را محاسبه نمایید .

۶- عدد  $N = 139392$  مفروض است .

اولاً - تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد  $N$  را حساب کنید .

ثانیاً - هرگاه  $A$  یکی از مقسوم‌علیه‌های عدد  $N$  باشد،  $A$  را چنان

بیایید که عدد  $\frac{N}{A}$  شامل ۷ مقسوم علیه باشد .

۷- کسر  $\frac{5a-28}{5a+22}$  مفروض است که در آنجا  $a \geq 6$  می باشد .

۱-ا را چگونه اختیار کنیم تا کسر مفروض تحویل ناپذیر باشد .

۲- در حالتی که کسر مفروض تحویل پذیر است  $a$  را چنان تعیین کنید که مجموع صورت و مخرج یکی از کسرهای معادال کسر حاصل برابر  $۲۲۲$  باشد.

۳- کوچکترین مقدار  $a$  را چنان بیابید که کسر مفروض مولد عدد اعشاری تحقیقی باشد .  
(شهریور ۱۳۴۹)

۱- اولاً- عدد ۲۰۰ (۲۰۰) را به مبنای ۱۲ بپسیرید .

ثانیاً- اعداد  ${}_{12}(42)$  و  ${}_{12}(23)$  را درمبنای ۱۲ ضرب کنید و حاصل- ضرب را در مبنای ده نمایش دهید.

۲-  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که عدد چهار رقمی  $N = \overline{ab^2a}$  بر ۴۵ قابل قسمت باشد.

۳- در يك عمل تقسيم مقسوم عليه برابر ۵۹ و باقيمانده تقسيم ۷ برابر

۱- ثابت کنید اگر  $\frac{a}{b}$  تحویل ناپذیر باشد، کسر  $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$  نیز تحویل ناپذیر است.

۲- اعداد صحیح  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که کسر اخیر قابل تبدیل به کسر اعشاری متناوب  $0,189189\ldots$  گردد.

۵- ثابت کنید اگر عدد صحیح  $a$  با سه و پنج اول باشد، به ازای جمیع مقادیر صحیح  $n$  عدد :

$$N = a^{\wedge n} + \wedge a^{\vee n} - a$$

بر ۷۵ بخش پذیر است .

۶۔ کسر :

$$F = \frac{3199}{36288}$$

مفروض است .

اولاً - این کسر را به کسری که در مخرج آن قوای ۱۲ باشد تبدیل کنید .

ثانیاً - اگر صورت کسر حاصل  $N=1828$  باشد، عدد  $N$  را در دستگاه شمار به مبنای ۱۲ بنویسید.

ثالثاً- نشان دهید که  $F$  را می‌توان به صورت مجموع کسرهایی با قوای مختلف ۱۲ در مخرج نوشت، سپس  $F$  را در مبنای ۱۲ بنویسید.

۷- عدد اعشاری که دارای دورقم اعشار باشد پیدا کنید بطوری که بدانیم جذر تقریبی نقصانی این عدد تا  $0/01$  تقریب با خود این عدد برابر باشد.

(خرداد ۱۳۴۹)

۱- ارقام  $x$  و  $y$  را طوری بیابید که عدد  $N = \overline{2xy4}$  بر ۷۲ بخش- پذیر باشد.

۲- کوچکترین مضرب مشترك دو عدد برابر ۳۶۴۰ و عدد کوچکتر

مجذور خارج قسمت می باشد؛ مقسوم را محاسبه نمایید.

۴- کوچکترین عدد فرد چنان بیاید که هرگاه يك صفر بین رقم یکان و دهگان آن قرار دهیم بر عدد مفروض ۱۷۷۳۰ واحد اضافه شود.

۵- کوچکترین مضرب مشترك دوعدد برابر ۵۰۴ است و می دانیم جذر تقریبی نقصانی حاصل ضرب آن دوعدد تا يك واحد تقریب، برابر ۹۵ می باشد؛ آن دو عدد را بیابید.

$$۶- \text{كسر } \frac{۴a+۱}{a(۴a-۱)} \text{ مفروض است:}$$

۱- ثابت کنید به ازای جمیع مقادیر صحیح و مثبت  $a$  کسر فوق تحویل ناپذیر است.

۲-  $a$  را چنان بیابید که کسر مفروض مولد عدد اعشاری متناوب مرکب  $۰/۲۸۳۳۳\ldots$  باشد.

۳- ثابت کنید کسر مفروض نمی تواند مولد عدد اعشاری تحقیقی باشد.

۷- هرگاه تعداد مقسوم علیه های عدد  $۴N+۱$  فرد باشد، ثابت کنید عدد  $N$  را می توان به صورت حاصل ضرب دو عدد متوالی نوشت.

(خرداد ۱۳۵۰)

۱- مطلوب است تعیین اعداد صحیح که چون عدد  $۳۸۳۹۷$  را بر آنها تقسیم کنیم، خارج قسمت تقریبی تا يك واحد مضرب صحیح صد باشد.

۲- عدد چهار رقمی محصور بین چهار هزار و پنج هزار چنان تعیین کنید که باقیمانده تقسیم آن بر اعداد ۴ و ۲۵ و ۹ بترتیب برابر ۳ و ۱ و ۴ باشد.

۳- ثابت کنید عبارت:  $P = 5^n - 4n - 1$  به ازای جمیع مقادیر صحیح و مثبت  $n$  بر ۱۶ بخش پذیر است.

۴- نسبت دوعدد برابر  $\frac{۶۵}{۷۸}$  است و می دانیم تفاضل حاصل ضرب و

کوچکترین مضرب مشترك آن دو عدد برابر ۳۹۶۰ می باشد. آن دو عدد را محاسبه نمایید.

۵- تعداد مقسوم علیه های عدد ۱۷۹۲ را حساب کنید و ثابت کنید که اعداد ۱۷۹۲ و  $۱۴a+۳$  نسبت به هم اولند.

$$۶- \text{كسر: } \frac{۱۰a-۷}{۱۰a+۱۳} \text{ مفروض است.}$$

اولا - ثابت کنید کسر مفروض تحویل ناپذیر است.

ثانیاً -  $a$  را چنان تعیین کنید که کسر مفروض مولد عدد اعشاری متناوب  $۰/۳۹۳۹۳۹\ldots$  باشد.

$$\text{ثالثاً - هرگاه رابطه: } \frac{۱۰a-۷}{۱۰a+۱۳} = \frac{b}{c} \text{ برقرار باشد، } a \text{ را}$$

چنان تعیین کنید که داشته باشیم:  $b+c=۱۳۸$ .

۷- چند عدد سه رقمی وجود دارد که مجذور کامل می باشند؛ با ذکر دلیل توضیح دهید. (شهریور ۱۳۵۰)

۱- از معادله زیر مبنای  $x$  را حساب کنید:

$$\frac{۵}{۱۶} = (۰/۲۴)^x$$

۲- ثابت کنید به ازای جمیع مقادیر صحیح و مثبت  $a$  عبارت:

$$P = a(a^2 + 11) \text{ بر } ۶ \text{ بخش پذیر است.}$$

۳- کسر متعارفی معادل عدد اعشاری  $۰/۳۱۲۵$  چنان تعیین کنید که کوچکترین مضرب مشترك دوجمله آن شامل ۱۵ مقسوم علیه باشد.

۴- عددی پنج برابر حاصل ضرب ارقامش می باشد؛ ثابت کنید این عدد بر ۷ بخش پذیر است.

۵- اولاً - ثابت کنید هرگاه تفاضل دو کسر تحویل ناپذیر معادل عدد صحیح باشد، مخرج آن دو کسر با هم برابر می شوند.

ثانیاً - به فرض اینکه دو کسر  $\frac{۷۲}{a}$  و  $\frac{b}{c}$  تحویل ناپذیر بوده و داشته

$$\text{باشیم: } ۶ = \frac{۷۲}{a} - \frac{b}{c}, \text{ مطلوب است محاسبه } a \text{ و } b \text{ و } c.$$

۶- کوچکترین عددی تعیین کنید که مضرب ۷ بوده و هرگاه آن را

بر ۱۱ تقسیم کنیم، باقیمانده برابر ۹ باشد و هرگاه همان عدد را بر ۳۷

تقسیم کنیم ، باقیمانده تقسیم ۱۹ گردد.

۷- هرگاه  $a$  فرد باشد، مطلوب است تعیین اعداد صحیح زوج مضرب  $a$  بطوری که جذر تقریبی نقصانی آنها تا يك واحد صحیح برابر  $2a$  باشد .  
( خرداد ۱۳۵۱ )

۱- کسر:  $\frac{3838}{20604}$  را تحویل ناپذیر کنید .

۲- عدد  $N$  را درمبنای ده چنان تعیین کنید که مضرب  $q$  بوده و داشته باشیم:  $N = (\overline{aaa})_7$  .

۳- اولاً- ثابت کنید کسر  $\frac{12}{6a+1}$  تحویل ناپذیر است .

ثانیاً -  $a$  را چنان تعیین کنید که کسر مفروض مولد عدد اعشاری  $0.324324\ldots$  باشد.

۴- هرگاه باقیمانده تقسیم عدد  $n^2 + 3n + 18$  بر عدد  $n + 2$  برابر ۴ باشد، مقادیر صحیح و مثبت  $n$  را محاسبه نمایید.

۵- عدد  $N$  به صورت:  $N = a^4 b^2 c$  به عوامل اول تجزیه شده است.  
اولاً - تعداد مقسوم علیه های عدد  $N$  را محاسبه نمایید.  
ثانیاً- به فرض اینکه  $a < b < c$  باشد ،  $a$  و  $b$  و  $c$  را چنان تعیین کنید که عدد  $21N$  مجذور کامل باشد.

۶- ارقام عدد چهار رقمی  $N = \overline{abcd}$  در رابطه :

$$5(a + b + c - d) = d - 6$$

صدق می کنند.

اولاً - باقیمانده تقسیم عدد  $N$  را بر عدد ۹ حساب کنید.

ثانیاً - به فرض اینکه  $d = 6$  باشد، بزرگترین جواب  $N$  را حساب کنید .

۷- اولاً- کوچکترین مضرب مشترك اعداد ۲۵ ، ۴۰ و ۳۰ را از راه تجزیه به عوامل اول محاسبه نمایید ،

ثانیاً - کوچکترین عددی تعیین کنید که باقیمانده تقسیم آن بر اعداد ۲۵ ، ۴۰ و ۳۰ بترتیب برابر ۳ ، ۱۸ و ۸ باشد . ( شهریور ۱۳۵۱ )